

หนังสือเรียนสาระความรู้พื้นฐาน (คณิตศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
รายวิชา

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

พด 32003

หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551
สำหรับคนไทยในต่างประเทศ



ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ
สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ
กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารทางวิชาการลำดับที่ 7/2553

ชื่อหนังสือ : หนังสือเรียนสาระความรู้พื้นฐาน (คณิตศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
รายวิชา ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (พค 32003)
หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551
สำหรับคนไทยในต่างประเทศ

ปีที่พิมพ์ : พฤศจิกายน 2553

เอกสารลำดับที่ : 7/2553

จัดพิมพ์และเผยแพร่ : ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ
สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ
กระทรวงศึกษาธิการ
โทร. 0 2281 7217 – 8 , 0 2628 5329 , 0 2628 5331
โทรสาร 0 2628 5330

เว็บไซต์ : <http://www.nfe.go.th/0104-v3/frontend/>

หนังสือเรียนสาระความรู้พื้นฐาน (คณิตศาสตร์)
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
รายวิชา ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (พค 32003)
หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551
สำหรับคนไทยในต่างประเทศ

ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ
สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ
กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ ได้ดำเนินการจัดทำหนังสือเรียนรายวิชา ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (พค32003) สำหรับใช้ในการเรียนการสอนตามหลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 สำหรับคนไทยในต่างประเทศ ที่มีวัตถุประสงค์ในการพัฒนาผู้เรียนให้มีคุณธรรม จริยธรรม มีสติปัญญาและศักยภาพในการประกอบอาชีพ การศึกษาต่อ และสามารถดำรงชีวิตอยู่ในครอบครัว ชุมชน สังคมได้อย่างมีความสุข โดยผู้เรียนสามารถนำหนังสือเรียนไปใช้ ด้วยวิธีการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง ปฏิบัติกิจกรรมรวมทั้งแบบฝึกหัด เพื่อทดสอบความรู้ความเข้าใจในสาระเนื้อหา โดยเมื่อศึกษาแล้วยังไม่เข้าใจ สามารถกลับไปศึกษาใหม่ได้ ผู้เรียนอาจจะสามารถเพิ่มพูนความรู้หลังจากศึกษาหนังสือเรียนนี้ โดยนำความรู้ไปแลกเปลี่ยนกับเพื่อนในชั้นเรียน ภูมิปัญญาในท้องถิ่น จากแหล่งเรียนรู้และจากสื่ออื่นๆ

ในการดำเนินการจัดทำหนังสือเรียนรายวิชานี้ ได้รับความอนุเคราะห์เป็นอย่างมากจากสถาบันการศึกษาทางไกล ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ ขอขอบคุณ ไว้ ณ โอกาสนี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเรียนชุดนี้จะเป็นประโยชน์ในการจัดการเรียนการสอนตามสมควร หากมีข้อเสนอแนะประการใด ขอน้อมรับไว้ด้วยความขอบคุณยิ่ง

ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ

พฤศจิกายน 2553

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	(ก)
สารบัญ	(ข)
โครงสร้างเนื้อหา	1
แบบทดสอบก่อนเรียน	3
ตอนที่ 1 ความสัมพันธ์	7
เรื่องที่ 1 คู่อันดับ	7
เรื่องที่ 2 ผลคูณคาร์ทีเซียน	9
กิจกรรมที่ 1 (แบบฝึกหัดที่ 1)	11
เรื่องที่ 3 ความสัมพันธ์	15
กิจกรรมที่ 2 (แบบฝึกหัดที่ 2)	16
เรื่องที่ 4 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	19
กิจกรรมที่ 3 (แบบฝึกหัดที่ 3)	24
ตอนที่ 2 กราฟและอินเวอร์สของความสัมพันธ์	28
เรื่องที่ 1 กราฟของความสัมพันธ์	28
กิจกรรมที่ 4 (แบบฝึกหัดที่ 4)	31
เรื่องที่ 2 อินเวอร์สของความสัมพันธ์	34
2.1 อินเวอร์สของความสัมพันธ์	34
กิจกรรมที่ 5 (แบบฝึกหัดที่ 5)	37
2.2 กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์	40
กิจกรรมที่ 6 (แบบฝึกหัดที่ 6)	44
ตอนที่ 3 ฟังก์ชัน	49
เรื่องที่ 1 ความหมายของฟังก์ชัน	49
1.1 บทนิยามของฟังก์ชัน	49
กิจกรรมที่ 7 (แบบฝึกหัดที่ 7)	52
1.2 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน	53
1.3 ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x	55
กิจกรรมที่ 8 (แบบฝึกหัดที่ 8)	56

1.4 ฟังก์ชันจากเซตหนึ่งไปอีกเซตหนึ่ง	58
กิจกรรมที่ 9 (แบบฝึกหัดที่ 9)	69
เรื่องที่ 2 ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก	73
2.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น	73
2.2 ฟังก์ชันขั้นบันได	75
2.3 ฟังก์ชันกำลังสอง	76
2.4 ฟังก์ชันค่าสมบูรณ์	78
2.5 ฟังก์ชันพหุนาม	79
2.6 ฟังก์ชันตรรกยะ	80
2.7 ฟังก์ชันที่เป็นคาบ	81
กิจกรรมที่ 10 (แบบฝึกหัดที่ 10)	81
แบบทดสอบหลังเรียน	85
เฉลยแบบทดสอบและกิจกรรม	
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	89
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1	90
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2	92
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3	92
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 4	95
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 5	97
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 6	98
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 7	101
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 8	101
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 9	102
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 10	103
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	105
บรรณานุกรม	106
คณะผู้จัดทำ	107

โครงสร้างเนื้อหา

รายวิชาความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (พค 32003)

สาระความรู้พื้นฐาน (คณิตศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐานที่ 2.2 มีความรู้ความเข้าใจ และทักษะพื้นฐานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
2. เขียนความสัมพันธ์ของฟังก์ชันในรูปตารางหรือสมการของกราฟได้
3. หาผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตต่างๆ ได้
4. เขียนกราฟของความสัมพันธ์และฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
5. สร้างความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันจากสถานการณ์หรือปัญหาที่กำหนดให้ได้
6. ใช้กราฟของสมการฟังก์ชันในการแก้ปัญหาได้
7. ใช้ความรู้และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม

ขอบข่ายเนื้อหา

- ตอนที่ 1 ความสัมพันธ์
 - เรื่องที่ 1 คู่อันดับ
 - เรื่องที่ 2 ผลคูณคาร์ทีเซียน
 - เรื่องที่ 3 ความสัมพันธ์
 - เรื่องที่ 4 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
- ตอนที่ 2 กราฟและอินเวอร์สของความสัมพันธ์
 - เรื่องที่ 1 กราฟของความสัมพันธ์
 - เรื่องที่ 2 อินเวอร์สของความสัมพันธ์
- ตอนที่ 3 ฟังก์ชัน
 - เรื่องที่ 1 ความหมายของฟังก์ชัน
 - เรื่องที่ 2 ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก

เวลาที่ใช้ในการศึกษา 40 ชั่วโมง

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ศึกษารายละเอียดของโครงสร้างรายวิชา พค32003 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ให้เข้าใจในหัวข้อมาตรฐานการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง และขอบข่ายเนื้อหา
2. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน จำนวน 20 ข้อ
3. ศึกษารายละเอียดเนื้อหาที่ละตอนอย่างละเอียด และทำกิจกรรมตามที่กำหนด แล้วตรวจสอบกับแนวตอบกิจกรรม (แบบฝึกหัด) ถ้าผู้เรียนตอบผิดควรกลับไปศึกษาและทำความเข้าใจในเนื้อหานั้นใหม่ให้เข้าใจก่อนที่จะศึกษาในเรื่องต่อไป
4. ศึกษาเนื้อหาและทำกิจกรรมให้ครบทุกตอน
5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน จำนวน 20 ข้อ

สื่อการเรียนรู้

1. หนังสือเรียน
2. ชุดการเรียนรู้ทางไกล หมวดวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของสถาบันการศึกษาทางไกล สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย

การประเมินผล

1. จากการทำแบบทดสอบตนเองก่อนเรียนและหลังเรียน
2. จากการทำกิจกรรมท้ายบทในแต่ละเรื่อง

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง จงกาเครื่องหมาย X ทั้บอักษร ก ข ค หรือ ง หน้าคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียว

แล้วตรวจคำตอบท้ายบท

1. ถ้าให้ $(x, 1) = (3, y)$ แล้ว คู่อันดับ (x, y) จะเท่ากับข้อใด

- ก. (1, 3) ข. (3, 1)
ค. (1, 1) ง. (3, 3)

2. ถ้า $(x+3y, 5) = (5, 3x-y)$ แล้ว คู่อันดับ $(x+1, y-1)$ จะเท่ากับข้อใด

- ဂ်. (2, 1) ခု. (0, 3)
ဃ. (3, 0) ဒဲ. (5, 5)

3. กำหนดให้ $A = \{2, 3\}$, $B = \{5, 7, 9\}$ จงหา $B \times A$

- பி. $\{(2,5),(2,7),(2,9)\}$
 சி. $\{(3,5),(3,7),(3,9)\}$
 கி. $\{(2,5),(2,7),(2,9),(3,5),(3,7),(3,9)\}$
 டி. $\{(5,2),(5,3),(7,2),(7,3),(9,2),(9,3)\}$

4. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ข้อใดคือความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x\}$

- $$\begin{array}{ll} \text{fi. } r = \{(2,1), (4,2)\} & \text{vi. } r = \{(1,2), (2,4)\} \\ \text{pi. } r = \{(4,2)\} & \text{vi. } r = \{(2,1)\} \end{array}$$

5. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$ แล้ว r มีสมาชิกทั้งหมดกี่ตัว

- ဂ. ၄
ဓ. ၃

6. โดเมนของความสัมพันธ์ คือข้อใด

- | | |
|---------------------|----------------------|
| ၈. R | ၉. $\{x x > 3\}$ |
| ၉. $\{x x \geq 3\}$ | ၁၀. $\{x x \leq 3\}$ |

7. เรนจ์ของความสัมพันธ์ คือข้อใด

ก. $\{y \in R \mid y \neq 0\}$

ข. $\{y \in R \mid y = f(0)\}$

ค. $\{y \in R \mid y \neq 9\}$

ง. $\{y \in R \mid y \neq -9\}$

8. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}\}$ จงหาโดเมนของ r^{-1}

ก. R

ข. $[0, \infty)$

ค. $[0, \frac{1}{2})$

ง. $(0, 1]$

9. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x - 1\}$ ดังนั้น r^{-1} เท่ากับข้อใด

ก. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x = \frac{y+1}{2}\}$

ข. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x+1}{2}\}$

ค. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{y-1}{2}\}$

ง. $r = \{(y, x) \in R \times R \mid x = \frac{y+1}{2}\}$

10. ข้อใดคือ อินเวอร์ส ของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x - 1\}$

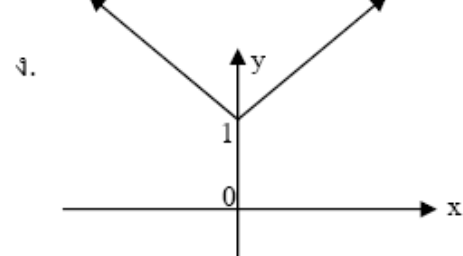
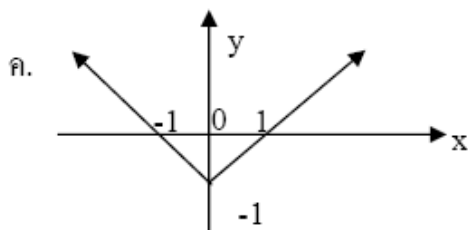
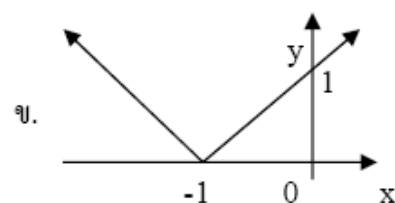
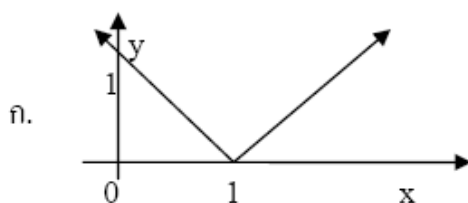
ก. $r^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid x = 2y - 1\}$

ข. $r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid x = 2y - 1\}$

ค. $r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$

ง. $r^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$

11. ข้อใดคือกราฟของ $y = |x - 1|$



12. ความสัมพันธ์ใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชัน

ก. $r_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,4)\}$

ข. $r_2 = \{(1,4), (2,4), (2,6), (3,5)\}$

ค. $r_3 = \{(1,5), (2,6), (3,7), (4,8)\}$

ง. $r_4 = \{(3,2), (4,2), (5,1), (5,3)\}$

13. กำหนด $A = \{1,2,3,4\}$ และถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A ข้อใดต่อไปนี้ ที่มีความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชัน แต่อินเวอร์ส ของความสัมพันธ์ไม่ใช่ฟังก์ชัน

ก. $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = \sqrt{x}\}$

ข. $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2\}$

ค. $r = \{(1,1), (2,4), (3,2)\}$

ง. $r = \{(1,1), (2,4), (3,3), (4,1)\}$

14. ถ้า $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$ และ $f: A \rightarrow B$ แล้ว ข้อใดสรุปผิด

ก. โดเมนของ f คือ $\{1,2,3\}$

ข. เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของ B

ค. ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 ด้วย

ง. f^{-1} ต้องเป็นฟังก์ชันเสมอ

15. ฟังก์ชันเชิงเส้น เมื่อนำมาเขียนเป็นกราฟแล้ว จะได้กราฟชนิดใด

ก. กราฟเส้นตรง

ข. กราฟขั้นบันได

ค. รูปพาราโบลา

ง. รูปฟังก์ชันที่เป็นคาบ

16. กำหนด $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{4,5,6\}$ ข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

ก. $f_1 = \{(1,4), (2,5), (3,4)\}$

ข. $f_2 = \{(1,4), (2,6), (3,5)\}$

ค. $f_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

ง. $f_4 = \{(4,1), (5,2), (6,3)\}$

17. ฟังก์ชันในข้อใดที่เป็น 1-1

ก. $f(x) = |x| + 5$

ข. $f(x) = x^2 + 2x$

ค. $f(x) = x^2 + 3$

ง. $f(x) = 2x + 3$

18. กำหนด $f(x) = x^2 + 3x - 5$ จงหาค่าของ $f(0)$

ก. 5

ข. -5

ค. -7

ง. 0

19. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 2x - 5$ จงหา $f(2)$

ก. 2

ข. 3

ค. 4

ง. 6

20. $y = 2$ เป็นฟังก์ชันชนิดใด

ก. ฟังก์ชันเชิงเส้น

ข. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

ค. ฟังก์ชันขั้นบันได

ง. ฟังก์ชันตรรกยะ

ตอนที่ 1 ความสัมพันธ์

เรื่องที่ 1 คู่อันดับ (Ordered Pairs)

คู่อันดับ เป็นคำที่ใช้เรียกการจับคู่ระหว่างสิ่งของสองสิ่ง โดยถือตำแหน่งหรืออันดับเป็นสำคัญ ถ้าให้ a และ b เป็นสิ่งของสองสิ่ง “คู่อันดับ a,b ” หมายถึง การจับคู่ระหว่าง a และ b โดยมี a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ (a,b)

คู่อันดับจะถืออันดับของสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังเป็นสำคัญ ถ้าเราสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง คู่อันดับที่ได้ใหม่อาจจะมีความแตกต่างไปจากคู่อันดับเดิม เช่น

ให้ สมาชิกตัวหน้า แทนชื่อจังหวัด

ให้ สมาชิกตัวหลัง แทนชื่ออำเภอในจังหวัดนั้น

ดังนั้น คู่อันดับ (อุบลราชธานี, วารินชำราบ) จึงเป็นคู่อันดับที่ถูกต้องตามกำหนด แต่ถ้าเราสลับคู่อันดับเป็น (วารินชำราบ, อุบลราชธานี) จะได้คู่อันดับใหม่ ซึ่งมี วารินชำราบ เป็นชื่อจังหวัด และอุบลราชธานี เป็นชื่ออำเภอแทน ซึ่งผิดความหมายไปจากเดิม

บทนิยาม 1 คู่อันดับ (a,b) เท่ากับคู่อันดับ (c,d) ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด เซต $A = \{1, 2\}$

$$B = \{7, 8, 9\}$$

(1) จงสร้างคู่อันดับ 5 คู่ ซึ่งมีสมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของ A และสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของ B

(2) จงสร้างคู่อันดับ 5 คู่ ซึ่งมีสมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของ B และสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของ A

วิธีทำ (1) จาก $A = \{1, 2\}$, $B = \{7, 8, 9\}$

คู่อันดับ (a,b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ ได้แก่

$(1,7), (1,8), (1,9), (2,7), (2,9)$

(2) จาก $A = \{1, 2\}$, $B = \{7, 8, 9\}$

คู่อันดับ (a,b) โดยที่ $a \in B$ และ $b \in A$ ได้แก่

$(7,1), (7,2), (8,1), (8,2), (9,1)$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $(3,a) = (b,7)$ จงหา a , b และ $a+b$

วิธีทำ จาก $(3,a) = (b,7)$

จะได้ว่า $3 = b$ และ $a = 7$

$$a+b = 7+3 = 10$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $(x+1,3) = (2,y-1)$ จงหา (x,y)

วิธีทำ จาก $(x+1,3) = (2,y-1)$

จะได้ว่า $x+1 = 2$ และ $3 = y-1$

$$x = 2-1 \quad \left| \quad 3+1 = y\right.$$

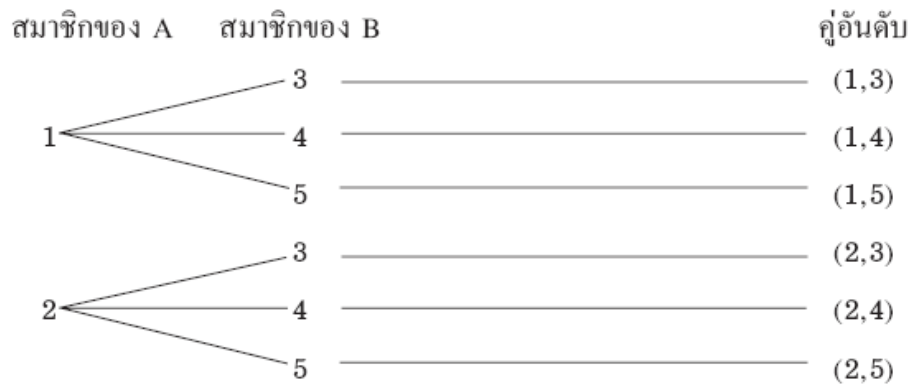
$$x = 1 \quad \left| \quad 4 = y\right.$$

$$(x,y) = (1,4)$$

ตอบ

เรื่องที่ 2 ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

ให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{3, 4, 5\}$ จะเขียนคู่อันดับ (a,b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ โดยการจับคู่ระหว่างสมาชิกของ A กับ B ได้ดังนี้



ดังนั้นจะมีคู่อันดับทั้งหมด 6 คู่อันดับ คือ $(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)$ เซตของคู่อันดับทั้งหมดคือ $\{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$ เรียกเซตนี้ว่า “ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B ” เขียนแทนด้วย $A \times B$ อ่านว่า เอคูณบี

บทนิยาม 2 ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a,b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$

เราเขียน $A \times B$ ในรูปแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$B \times A = \{(x,y) \mid x \in B \wedge y \in A\}$$

$$A \times A = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in A\}$$

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 5, 7\}$

จงหา (1) $A \times B$

(2) $B \times A$

(3) $B \times B$

(4) $A \times A$

วิธีทำ (1) $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
 $= \{(1,3), (1,5), (1,7), (2,3), (2,5), (2,7)\}$

$$\begin{aligned}
(2) \quad B \times A &= \{(x,y) \mid x \in B \wedge y \in A\} \\
&= \{(3,1), (3,2), (5,1), (5,2), (7,1), (7,2)\} \\
(3) \quad B \times B &= \{(x,y) \mid x \in B \wedge y \in B\} \\
&= \{(3,3), (3,5), (3,7), (5,3), (5,5), (5,7), (7,3), (7,5), (7,7)\} \\
(4) \quad A \times A &= \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in A\} \\
&= \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{3, 5, 7\}$

(1) จงหาจำนวนสมาชิกของ $A \times B$

(2) จงหาจำนวนสมาชิกของ $B \times B$

วิธีทำ (1) จาก $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 5, 7\}$

$$A \times B = \{(1,3), (1,5), (1,7), (2,3), (2,5), (2,7)\}$$

จำนวนสมาชิกของ $A \times B$ มี 6 คู่อันดับ

(2) จาก $B = \{3, 5, 7\}$

$$B \times B = \{(3,3), (3,5), (3,7), (5,3), (5,5), (5,7), (7,3), (7,5), (7,7)\}$$

จำนวนสมาชิกของ $B \times B$ มี 9 คู่อันดับ

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้อ 1 จะเห็นว่า เซต A มีสมาชิก 2 ตัว, เซต B มีสมาชิก 3 ตัว $A \times B$ มีสมาชิกทั้งหมด 6 คู่อันดับ ซึ่งเท่ากับผลคูณของจำนวนสมาชิกของ เซต A และ เซต B และ จากตัวอย่างข้อ 2 เซต B มีสมาชิก 3 ตัว จำนวนสมาชิกของ $B \times B$ มี 9 คู่อันดับ ซึ่งเท่ากับผลคูณของจำนวนสมาชิกของเซต B และเซต B

นั่นคือ ถ้าให้ n แทนจำนวนสมาชิกของเซต จะได้ว่า

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

สมบัติเกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียน

1. โดยทั่วไป $A \times B$ และ $B \times A$ อาจจะไม่เท่ากัน
2. ถ้า $A \neq \emptyset$ และ $B \neq \emptyset$ แล้ว $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$
3. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ $B \neq \emptyset$ แล้ว $A \times B$ และ $B \times A$ เป็นเซตอนันต์
4. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว $A \times B$ และ $B \times A$ เป็นเซตจำกัด
5. จำนวนสมาชิกของ $A \times B =$ จำนวนสมาชิกของ $B \times A$
 $=$ ผลคูณของจำนวนสมาชิกของ A และของ B

6. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
7. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
8. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
 $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
9. $A \times B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$
10. ถ้า $A \times C = B \times C$ และ $C \neq \emptyset$ แล้ว $A = B$

กิจกรรมที่ 1

เมื่อนักศึกษา ศึกษาเนื้อหาในเรื่องที่ 1 คู่อันดับ และเรื่องที่ 2 ผลคูณคาร์ทีเซียนจบแล้ว
ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 1

แบบฝึกหัดที่ 1

ให้นักศึกษาฝึกทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. กำหนดเซต $A = \{2, 3\}$

$$B = \{6, 7, 8\}$$

1) จงสร้างคู่อันดับ 6 คู่ ซึ่งมีสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของ A และ B

ตามลำดับ

.....

.....

.....

2) จงสร้างคู่อันดับ 6 คู่ ซึ่งมีสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของ B และ A

ตามลำดับ

.....

.....

.....

2. ถ้าคู่อันดับ $(x, 1) = (2, y)$ แล้วจงหาคู่อันดับ (x, y)

.....

.....

.....

3. ถ้าคู่อันดับ $(x, 2) = (3, y)$ แล้วจงหาคู่อันดับ $x + y$

.....

.....

.....

4. ถ้าคู่อันดับ $(x + y, 2) = (6, x - y)$ แล้วจงหา x และ y

.....

.....

5. ถ้าคู่อันดับ $(a-1, b+2) = (6, 3)$ แล้ว จงหา (a, b)

.....

.....

.....

6. จงหา $A \times B$ และ $B \times A$ เมื่อกำหนด A และ B ดังต่อไปนี้

1) $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$

.....

.....

.....

2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

.....

.....

.....

7. กำหนด $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ และ $C = \{3, 4\}$ จงหา

1) $(A \times B) \cup (A \times C)$

.....

.....

.....

2) $A \times (B \cup C)$

.....

.....

.....

3) $(A \times B) \cap (A \times C)$

.....

.....

.....

4) $B \times (A \cap C)$

.....

.....

.....

5) $(A-B) \times C$

.....

.....

.....

6) $(A \times C) - (B \times C)$

.....

.....

.....

8. กำหนดเซต A มีสมาชิก 5 ตัว และเซต B มีสมาชิก 6 ตัว แล้วจงหาจำนวนสมาชิกของ

$A \times B, B \times A, A \times A$ และ $B \times B$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เรื่องที่ 3 ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์ เกิดจากของสองสิ่งมาเกี่ยวข้องกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง และของทั้งสองสิ่งนั้นจะเขียนในรูปคู่อันดับได้เสมอ

บทนิยาม r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$ และเรียกความสัมพันธ์จากเซต A ไปเซต A ว่าเป็นความสัมพันธ์ในเซต A

จากบทนิยามจะเห็นได้ว่า ความสัมพันธ์เป็นเซตของคู่อันดับ ดังนั้นการเขียนความสัมพันธ์จะเขียนแบบแจกแจงสมาชิกหรือแบบบอกเงื่อนไขก็ได้

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$

1) ให้ r_1 คือความสัมพันธ์ “หารลงตัว” จาก A ไป B จะได้ว่า

$$r_1 = \{(2,6), (2,8), (3,6), (4,8)\}$$

2) ให้ r_2 คือความสัมพันธ์ “มากกว่า” จาก A ไป B จะได้ว่า

$$r_2 = \emptyset$$

3) ให้ r_3 คือความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” จาก A ไป B จะได้ว่า

$$r_3 = \{(2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (4,5), (4,6), (4,7), (4,8)\}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์ในเซต A

$$\text{โดยกำหนด } r = \{(x,y) \in A \times A \mid y = |x|\}$$

$$\text{ดังนั้น } r = \{(-3,3), (-2,2), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

$$B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}\}$$

จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ แบบบอกเงื่อนไข

1. ให้ r_1 เป็นความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สอง” จากเซต A ไปเซต B

$$r_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

2. ให้ r_2 เป็นความสัมพันธ์ “เป็นสามเท่า” จากเซต A ไปเซต B

$$r_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = \frac{x}{3}\}$$

หรือถ้าเขียนแบบแจกแจงสมาชิก เขียนได้ดังนี้

$$r_1 = \{(1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4), \dots\}$$

$$r_2 = \{(3,1), (6,2), (9,3), (12,4), \dots\}$$

- * ในกรณีที่ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 2x+3\}$ เมื่อ R แทนเซตจำนวนจริง เราอาจเขียนสั้น ๆ ได้ดังนี้

$$r = \{(x,y) \mid y = 2x+3\}$$

- * ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ อาจเขียนแทน $(x,y) \in r$ ด้วย “xry”

(อ่านว่า เอกซ์ มีความสัมพันธ์ อาร์ กับ วาย)

ถ้า $(x,y) \notin r$ เขียนแทนด้วย “xry”

(อ่านว่า เอกซ์ ไม่มีความสัมพันธ์ อาร์ กับ วาย) *

กิจกรรมที่ 2

เมื่อนักศึกษา ศึกษาเนื้อหาในเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 2

แบบฝึกหัดที่ 2

ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. กำหนด $A = \{1,2,3,4,5\}$ และ $B = \{3,5,7,9,11\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ r ในรูปแจกแจงสมาชิก โดยที่ r เป็นความสัมพันธ์ "มากกว่า" จากเซต A ไปเซต B

.....

.....

.....

.....

2. กำหนด $A = \{2,3,4\}$ และ $B = \{4,6,8,10\}$ และกำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ r ในรูปแจกแจงสมาชิก

.....

.....

.....

.....

3. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 15\}$ เมื่อ $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนนับที่มีค่าน้อยกว่า } 9\}$ จงเขียน r ในรูปแจกแจงสมาชิก

.....

.....

.....

4. กำหนดให้ $A = \{3, 4, 5, 6\}$ และ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ถ้า $(x, y) \in r$ และ $x < y$

- (1) จงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก
- (2) จงเขียน r แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
- (3) $(3, 4), (4, 5)$ เป็นสมาชิกของ r หรือไม่

.....

.....

.....

.....

5. กำหนดให้ $A = \{x \mid x \in I^+ \text{ และ } x \leq 6\}$

และ $r_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 7\}$

$r_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid x > 3 \text{ และ } y = 4\}$

$r_3 = \{(x, y) \in A \times A \mid x = 2y\}$

จงเขียน r_1, r_2, r_3 ในรูปแจกแจงสมาชิก

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เรื่องที่ 4 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ดังนี้

$$r = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x\}$$

$$r = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$$

ถ้าพิจารณาเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r จะได้เซต $\{1, 2, 3\}$ ซึ่งเราเรียกเซตนี้ว่า
โดเมน (Domain) ของ r

ถ้าพิจารณาเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r จะได้เซต $\{2, 4, 6\}$ ซึ่งเราเรียกเซตนี้ว่า
เรนจ์ (Range) ของ r

บทนิยาม ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย D_r

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย R_r

จากบทนิยาม เราจะได้ว่า

$$D_r = \{x \mid (x,y) \in r\}$$

$$R_r = \{y \mid (x,y) \in r\}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์ใน A คือ

$$\{(x,y) \mid x < y\} \text{ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์นี้}$$

$$\text{วิธีทำ } r = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$$

$$D_r = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_r = \{2, 3, 4, 5\}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $r = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x-3}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ เนื่องจาก $r = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x-3}\}$

$r \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ และ $x \neq 3$ จึงจะหาค่า $\frac{1}{x-3}$ ได้

$$\therefore D_r = \mathbb{R} - \{3\} = \{x \mid x \neq 3\}$$

$$\text{จาก } y = \frac{1}{x-3} \Rightarrow x - 3 = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} + 3$$

จะเห็นว่า $y \neq 0$ จึงจะหาค่า $\frac{1}{y}$ ได้

$$\therefore R_r = \mathbb{R} - \{0\} = \{y \mid y \neq 0\}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{25 - x^2}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ พิจารณาโดเมน

จะเห็นว่า จำนวนที่จะนำมาแทนค่า x นั้น จะต้องไม่ทำให้ $25 - x^2$ เป็นจำนวนลบ เพราะรากที่ 2 ของจำนวนลบไม่เป็นจำนวนจริง

$$\text{จาก } y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$\text{จะหาค่า } y \text{ ได้ เมื่อ } 25 - x^2 \geq 0$$

$$\text{หรือ } x^2 - 25 \leq 0$$

$$(x-5)(x+5) \leq 0$$

ดังนั้น x จึงมีค่าได้ตั้งแต่ -5 ถึง 5 หรือเขียนได้ในรูป $[-5, 5]$ หรือ $|x| \leq 5$

$$D_r = \{x \mid -5 \leq x \leq 5\} \text{ หรือ } [-5, 5] \text{ หรือ } \{x \mid |x| \leq 5\}$$

การพิจารณาเรนจ์ของ r

เนื่องจาก $\sqrt{25 - x^2}$ จะต้องไม่เป็นจำนวนลบ และจะมากที่สุด เมื่อ $x = 0$

$$\text{จาก } -5 \leq x \leq 5$$

$$\therefore 0 \leq x^2 \leq 25$$

$$-25 \leq -x^2 \leq 0$$

$$0 \leq 25 - x^2 \leq 25$$

$$0 \leq \sqrt{25 - x^2} \leq 5$$

$$0 \leq y \leq 5$$

$$\therefore R_r = \{y \mid 0 \leq y \leq 5\} \text{ หรือ } [0, 5]$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x - 2}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ เนื่องจาก $r \subset R \times R$

$$\therefore \text{จะหาค่า } \sqrt{x - 2} \text{ ได้ เมื่อ } x - 2 \geq 0 \text{ หรือ } x \geq 2$$

$$D_r = \{x \mid x \geq 2\} = [2, \infty)$$

และ เมื่อ $x - 2 \geq 0$ แล้ว

$$\text{ค่าของ } \sqrt{x - 2} \geq 0 \text{ ด้วย}$$

$$\therefore R_r = \{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x,y) \mid y = -3x^2\}$

วิธีทำ $r = \{(x,y) \mid y = -3x^2\}$

จาก $y = -3x^2$

ให้ $x > 0$ จะได้ $x^2 > 0$ ดังนั้น $-3x^2 = y$ น้อยกว่าศูนย์

$x = 0$ จะได้ $y = 0$

$x < 0$ จะได้ $x^2 > 0$ ดังนั้น $-3x^2 = y$ น้อยกว่าศูนย์

นั่นคือ ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใด ๆ y เป็นจำนวนจริงที่มีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับศูนย์เสมอ

ดังนั้น $D_r = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริง}\}$

$R_r = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ และ } y \leq 0\}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{x}\}$

วิธีทำ $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{x}\}$

จาก $y = \sqrt{x}$

เมื่อ $x \geq 0$ จะได้ $\sqrt{x} \geq 0$ เนื่องจาก $\sqrt{x}$ แทนรากที่เป็นบวกของ x

เมื่อ $x < 0$ ไม่สามารถหาค่าของ $\sqrt{x}$ ได้ เนื่องจากในระบบจำนวนจริงไม่นิยาม $\sqrt{x}$ เมื่อ x เป็นจำนวนลบ

ดังนั้น $D_r = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ และ } x \geq 0\}$

$R_r = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ และ } y \geq 0\}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x,y) \mid y = 2x+1\}$

วิธีทำ $r = \{(x,y) \mid y = 2x+1\}$

จาก $y = 2x+1$

ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ตาม สามารถหาค่า y ได้เสมอ นั่นคือ $D_r = R$

และจาก $y = 2x+1$

$$x = \frac{y-1}{2}$$

จะเห็นว่า y เป็นจำนวนจริงใดก็ตาม จะสามารถหาค่า x ได้เสมอ นั่นคือ $R_r = R$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{x+2}{x-1}\}$

วิธีทำ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{x+2}{x-1}\}$

จาก $y = \frac{x+2}{x-1}$

หาค่า y ได้ เมื่อ $x-1 \neq 0$ นั่นคือ $x \neq 1$

$$\therefore D_r = \{x \mid x \neq 1\}$$

จาก $y = \frac{x+2}{x-1}$

$$y(x-1) = x+2$$

$$xy-y = x+2$$

$$xy-x = y+2$$

$$x(y-1) = y+2$$

$$x = \frac{y+2}{y-1}$$

หาค่า x ได้ เมื่อ $y-1 \neq 0$ นั่นคือ $y \neq 1$

$$\therefore R_r = \{y \mid y \neq 1\}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| + 7\}$

วิธีทำ กำหนด $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| + 7\}$

$$\text{จาก } y = |x| + 7$$

ทุกจำนวนจริง x จะหาค่า y ได้เสมอ

$$\therefore D_r = \mathbb{R} \text{ หรือ } D_r = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$|x| \geq 0$ เสมอทุกจำนวนจริง x

$$\therefore |x| + 7 \geq 7$$

$$y \geq 7$$

$$\therefore R_r = \{y \mid y \geq 7\} = [7, \infty)$$

กิจกรรมที่ 3

เมื่อนักศึกษา ศึกษาเนื้อหาเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 3

แบบฝึกหัดที่ 3

ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. กำหนด $A = \{1,2,3,4,5\}$ และ $B = \{3,5,7,9,11\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ r ในรูปแจกแจงสมาชิก โดยที่ r เป็นความสัมพันธ์ "มากกว่า" จากเซต A ไปเซต B

.....

.....

.....

.....

2. กำหนด $A = \{2,3,4\}$ และ $B = \{4,6,8,10\}$ และกำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ r ในรูปแจกแจงสมาชิก

.....

.....

.....

.....

3. กำหนด $A = \{1,2,3,4,5\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 7\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

.....

.....

.....

.....

4. กำหนด $r = \{(x, y) \mid y = 2x + 3\}$ จงหา D_r และ R_r

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x+3}{x-1}\}$ จงหา D_r และ R_r

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x| + 3\}$ จงหา D_r และ R_r

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{36 - x^2}\}$ จงหา D_r และ R_r

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x-5}\}$ จงหา D_r และ R_r

.....

.....

.....

.....

.....

9. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-5}\}$ จงหา D_r และ R_r

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{3}\}$ จงหา D_r และ R_r

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตอนที่ 2 กราฟและอินเวอร์สของความสัมพันธ์

เรื่องที่ 1 กราฟของความสัมพันธ์

ในระบบแกนมุมฉาก เราสามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างคู่อันดับของจำนวนจริง (x,y) กับจุดในระนาบ โดยให้ x เป็นพิกัดแรก และ y เป็นพิกัดหลัง

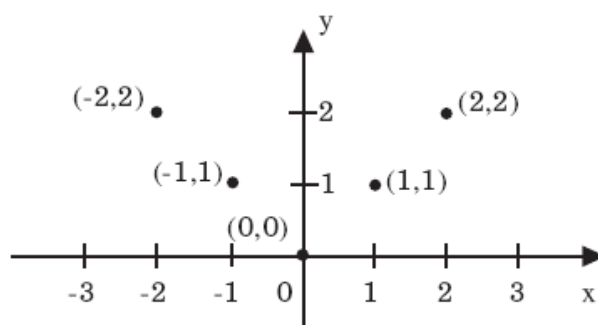
บทนิยาม กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซต R

กราฟของ r คือเซตของจุดในระนาบ โดยที่แต่ละจุดแทนคู่อันดับใน r

การเขียนกราฟของ r ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ใน R เราต้องทราบว่าความสัมพันธ์ r ประกอบด้วยคู่อันดับใดบ้าง แล้วจึงหาจุดระนาบซึ่งแทนคู่อันดับเหล่านั้น

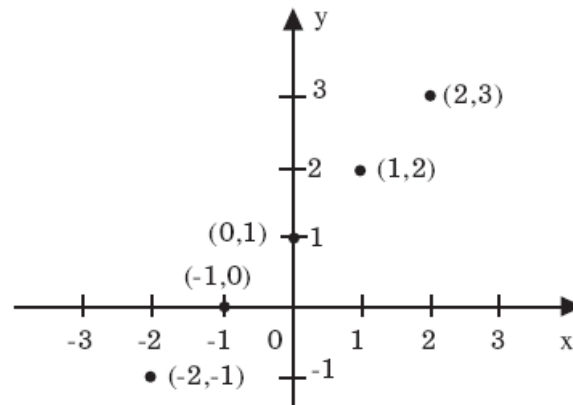
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(-2,2), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,2)\}$

วิธีทำ ให้หาจุดต่าง ๆ บนระนาบ แต่ละจุดแทนคู่อันดับของ r จะได้กราฟ r ดังนี้



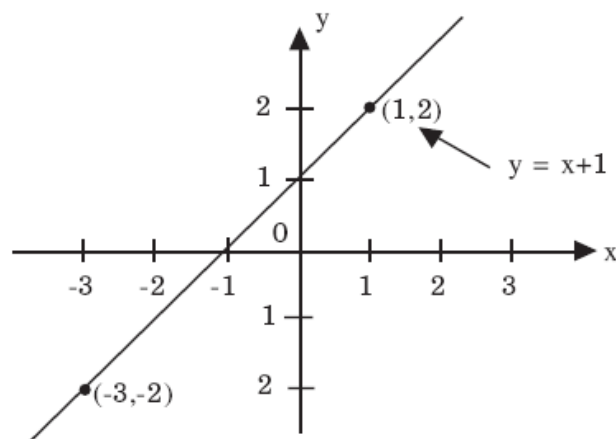
ตัวอย่างที่ 2 ให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และ $r = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x+1\}$ จงเขียนกราฟของ r

วิธีทำ $r = \{(-2,-1), (-1,0), (0,1), (1,2), (2,3)\}$



ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x+1\}$

วิธีทำ



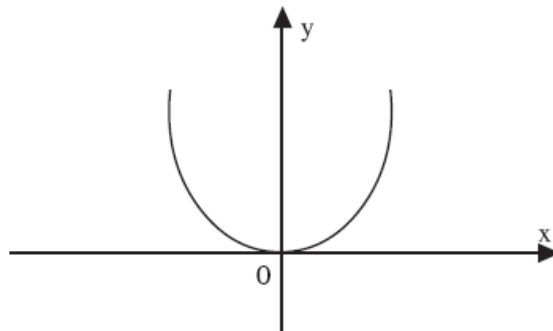
ข้อสังเกต เงื่อนไขของความสัมพันธ์ r คือสมการ $y = x+1$ เป็นเงื่อนไขเดียวกับความสัมพันธ์ในตัวอย่างที่ 2 แต่เนื่องจาก $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ ดังนั้น r จึงประกอบด้วยคู่อันดับมากมาย ซึ่งเมื่อนำไปเขียนเป็นกราฟแล้วจะได้กราฟเส้นตรง

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ถ้า a, b และ c เป็นค่าคงที่ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ แล้ว

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid ax+by+c = 0\}$ กราฟของ r จะเป็นรูปเส้นตรง

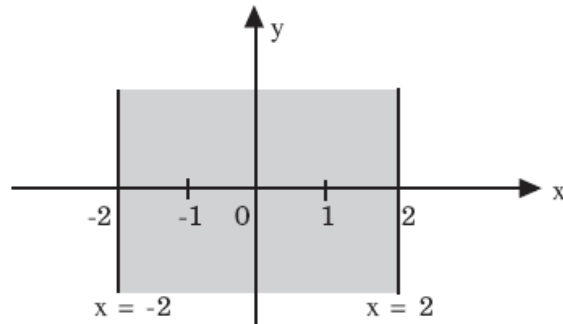
ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนกราฟของ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

วิธีทำ



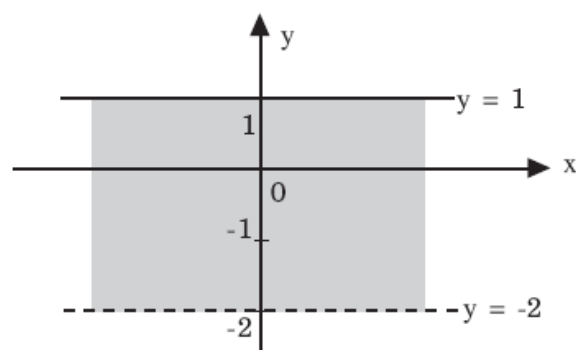
ตัวอย่างที่ 5 จงเขียนกราฟของ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 6 จงเขียนกราฟของ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 1\}$

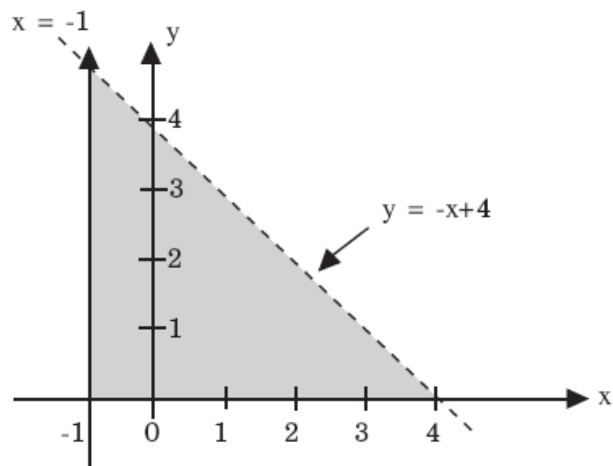
วิธีทำ



ข้อสังเกต ในการเขียนกราฟของความสัมพันธ์ที่ใดมีเส้นทึบแสดงว่าจุดทุกจุดบนเส้นนั้นรวมอยู่ในกราฟด้วย และที่ใดมีเส้นประแสดงว่าจุดในแนวเส้นประนั้นไม่รวมอยู่ในกราฟ

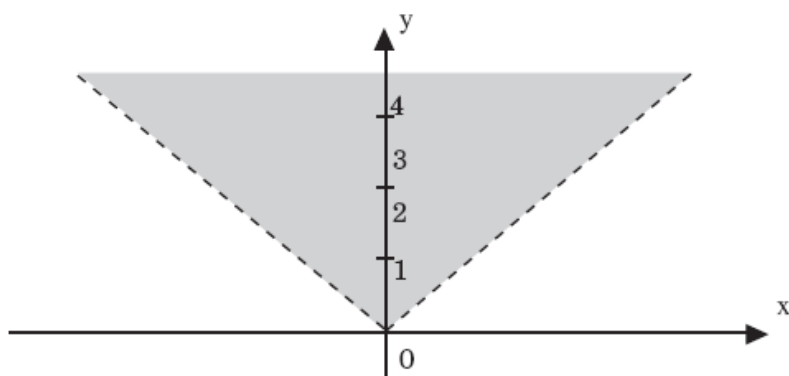
ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \mid x+y < 4 \wedge x \geq -1 \wedge y \geq 0\}$

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนกราฟของ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > |x|\}$

วิธีทำ



ข้อสังเกต กราฟของความสัมพันธ์อาจเป็นจุด เส้นตรง เส้นโค้ง หรือเป็นส่วนหนึ่งของระนาบ ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขของสมการ

กิจกรรมที่ 4

เมื่อนักศึกษา ศึกษาเนื้อหาเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 4

แบบฝึกหัดที่ 4

จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $r = \{(1,1), (1,5), (2,6), (3,8)\}$

.....

.....

.....

.....

2. $t = \{(x, y) \in A \times B \mid y \geq x\}$ เมื่อกำหนดให้ $A = \{2,3,4\}$ และ $B = \{2,3\}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x + y > 2\}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$4. r = \{(x, y) \in R \times R \mid y \geq |x|\}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$5. r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-1}\}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เรื่องที่ 2 อินเวอร์สของความสัมพันธ์

2.1 อินเวอร์สของความสัมพันธ์

$$\text{กำหนดให้ } r = \{(1,2), (2,3), (3,5)\}$$

$$D_r = \{1, 2, 3\}$$

$$R_r = \{2, 3, 5\}$$

ถ้าสลับที่กันระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับจะได้ความสัมพันธ์ใหม่ คือ

$$t = \{(2,1), (3,2), (5,3)\}$$

$$D_t = \{2, 3, 5\}$$

$$R_t = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{จะพบว่า } D_r = R_t \text{ และ } R_r = D_t$$

เราเรียกความสัมพันธ์ t นี้ว่า เป็นอินเวอร์สของความสัมพันธ์ r และเขียนแทนด้วย r^{-1}

$$\text{ดังนั้น ถ้ากำหนด } r = \{(1,2), (2,3), (3,5)\}$$

$$r^{-1} = \{(2,1), (3,2), (5,3)\}$$

บทนิยาม อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

จากบทนิยาม

(1) เราสามารถเขียน r^{-1} ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$r^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in r\}$$

(2) ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปเซต B แล้ว

r^{-1} เป็นความสัมพันธ์จากเซต B ไปเซต A

(3) $D_r = R_{r^{-1}}$ และ $R_r = D_{r^{-1}}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ r พร้อมทั้งบอกโดเมนและเรนจ์ของ r^{-1}

$$(1) \quad r = \{(2,2), (2,3), (1,5), (3,4), (3,2)\}$$

$$(2) \quad r = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,7)\}$$

วิธีทำ (1) จาก $r = \{(2,2), (2,3), (1,5), (3,4), (3,2)\}$

$$r^{-1} = \{(2,2), (3,2), (5,1), (4,3), (2,3)\}$$

$$D_{r^{-1}} = \{2, 3, 5, 4\} = R_r$$

$$R_{r^{-1}} = \{1, 2, 3\} = D_r$$

(2) จาก $r = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,7)\}$

$$r^{-1} = \{(2,1), (3,2), (4,3), (7,4)\}$$

$$D_{r^{-1}} = \{2, 3, 4, 7\}$$

$$R_{r^{-1}} = \{1, 2, 3, 4\}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ r พร้อมทั้งบอกโดเมนและเรนจ์ของ r และ r^{-1}

$$(1) \quad r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 2x-1\}$$

$$(2) \quad r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 3x-2\}$$

วิธีทำ (1) จาก $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 2x-1\}$

เราสามารถเขียนอินเวอร์สของ r ได้ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 สลับที่ x และ y ในคู่อันดับ แต่เงื่อนไขคงเดิม

$$r^{-1} = \{(y,x) \in R \times R \mid y = 2x-1\}$$

วิธีที่ 2 สลับที่ x และ y ในเงื่อนไข (โดยแทนที่ x ด้วย y และแทนที่ y ด้วย x) แต่คู่อันดับคงเดิม

$$r^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \mid x = 2y-1\}$$

หลังจากสลับที่แล้วเขียน y ในรูปของ x จะได้ว่า

$$r^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{x+1}{2}\}$$

สำหรับโดเมนและเรนจ์ของ r^{-1} นั้น จะเหมือนเดิมไม่ว่าจะเขียน r^{-1} ด้วยวิธีใด

ดังนั้น $D_r = R_{r^{-1}} = R$ และ $R_r = D_{r^{-1}} = R$

หมายเหตุ โดยทั่วไปนิยามเขียน r^{-1} แบบวิธีที่ 2

$$(2) \text{ จาก } r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 3x-2\}$$

$$r^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \mid x = 3y-2\}$$

$$= \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{x+2}{3}\}$$

$$D_r = R_{r^{-1}} = R \text{ และ } R_r = D_{r^{-1}} = R$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ r และโดเมนกับเรนจ์

$$(1) \text{ } r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x+1}\}$$

$$(2) \text{ } r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x^2-2}\}$$

$$(3) \text{ } r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x^2+1\}$$

$$(4) \text{ } r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-3}\}$$

$$(5) \text{ } r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{x+2}{x-3}\}$$

วิธีทำ

$$(1) \text{ } r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x+1}\}$$

$$r^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \mid x = \frac{1}{y+1}\}$$

$$= \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{1-x}{x}; x \neq 0\}$$

$$D_r = \{x \mid x \neq -1\} = R_{r^{-1}}$$

$$R_r = \{y \mid y \neq 0\} = D_{r^{-1}}$$

$$(2) \text{ } r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x^2-2}\}$$

$$D_r = \{x \mid x \leq -\sqrt{2} \text{ หรือ } x \geq \sqrt{2}\} = R_{r^{-1}}$$

$$R_r = \{y \mid y \geq 0\} = D_{r^{-1}}$$

$$r^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \pm \sqrt{x^2+2}; x \geq 0\}$$

$$(3) \quad r = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1 \}$$

$$D_r = \mathbb{R} = R_{r^{-1}}$$

$$R_r = [-1, \infty) = D_{r^{-1}}$$

$$r^{-1} = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \pm \sqrt{x-1} ; x \geq 1 \}$$

$$(4) \quad r = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x-3} \}$$

$$D_r = [3, \infty) = \{ x \mid x \geq 3 \} = R_{r^{-1}}$$

$$R_r = [0, \infty) = \{ y \mid y \geq 0 \} = D_{r^{-1}}$$

$$r^{-1} = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 3, x \geq 0 \text{ และ } y \geq 3 \}$$

$$(5) \quad \text{ถ้า } r = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x+2}{x-3} \}$$

$$D_r = \{ x \mid x \neq 3 \} = R_{r^{-1}}$$

$$R_r = \{ y \mid y \neq 1 \} = D_{r^{-1}}$$

$$r^{-1} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{3x+2}{x-1} ; x \neq 1 \}$$

กิจกรรมที่ 5

เมื่อนักศึกษา ศึกษาเนื้อหาเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 5

แบบฝึกหัดที่ 5

ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. จงหาโดเมน เรนจ์ และอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$(1) r = \{(1,2), (2,4), (3,4), (3,5)\}$$

.....

.....

.....

.....

$$(2) \text{ กำหนด } A = \{1,2,3\}, B = \{3,4,5,7\} \text{ และ } r = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x + 1\}$$

.....

.....

.....

.....

2. จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$(1) r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 2x + 3\}$$

.....

.....

.....

.....

$$(2) \ r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x}{x+1} \right\}$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$(3) \ r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{9 - x^2} \right\}$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$(4) \ r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x - 5} \right\}$$

.....

.....

.....

.....

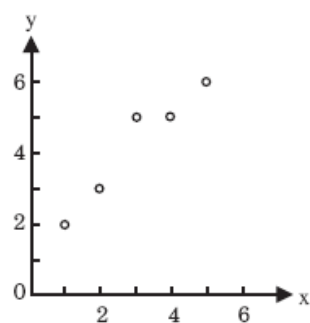
.....

2.2 กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์

กำหนดให้ $r = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,5), (5,6)\}$

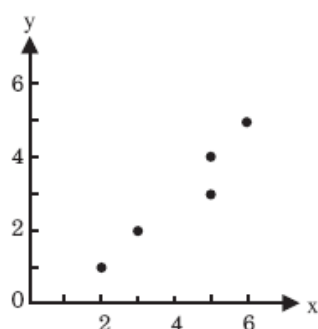
$$r^{-1} = \{(2,1), (3,2), (5,3), (5,4), (6,5)\}$$

ถ้านำความสัมพันธ์ r ไปเขียนกราฟ จะได้กราฟซึ่งมีลักษณะดังนี้



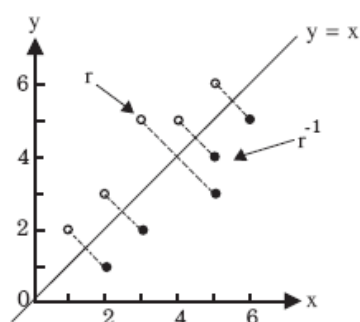
รูป 2.1 กราฟของ r

และกราฟของ r^{-1} จะมีลักษณะดังรูปข้างล่าง



รูป 2.2 กราฟของ r^{-1}

ถ้านำกราฟของ r และ r^{-1} มาไว้บนระนาบเดียวกัน ดังปรากฏในรูป 2.3



รูป 2.3 กราฟของ r และกราฟของ r^{-1}

กราฟของ r และ r^{-1} มีข้อที่น่าสนใจ คือ

ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมคู่อันดับของ r และของ r^{-1} ที่สมนัยกัน (หมายถึง คู่อันดับที่เกิดจากการสลับที่กันระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง) ส่วนของเส้นตรงทุกเส้นจะตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x$ และถูกแบ่งครึ่งด้วยเส้นตรง $y = x$

ลักษณะดังกล่าว ทำให้พบว่า ถ้าพับกระดาษตามแนวเส้นตรง $y = x$ กราฟของ r และ r^{-1} จะซ้อนทับกันสนิท ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า กราฟของ r และของ r^{-1} สมมาตรกัน โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 4 - 2x\}$

(1) จงหา r^{-1}

(2) จงเขียนกราฟของ r และของ r^{-1} ในระบบแกนมุมฉากเดียวกัน

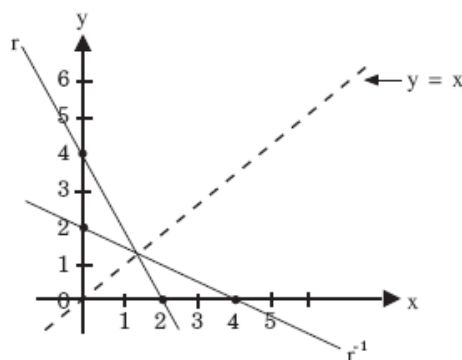
วิธีทำ

(1) จาก $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 4 - 2x\}$

$$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 4 - 2y\} \text{ หรือ}$$

$$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{4-x}{2}\}$$

(2) กราฟของ r และของ r^{-1} เป็นรูปเส้นตรง ดังรูปข้างล่าง



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9-x^2}\}$

(1) จงหา r^{-1}

(2) จงเขียนกราฟของ r และของ r^{-1}

(3) จงหา D_r , R_r , $D_{r^{-1}}$ และ $R_{r^{-1}}$

วิธีทำ (1) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9-x^2}\}$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9 \text{ และ } y \geq 0\}$$

$$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9 \text{ และ } x \geq 0\}$$

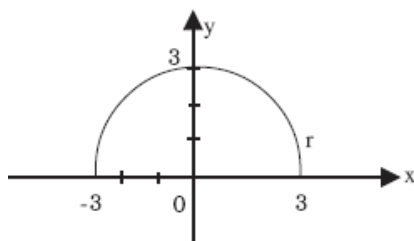
$$\text{หรือ } r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt{9-y^2}\}$$

(2) กราฟของ r เป็นรูปครึ่งวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$

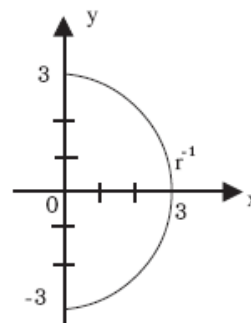
รัศมี 3 หน่วย เมื่อ $y \geq 0$ (ดูรูปที่ 1)

กราฟของ r^{-1} เป็นรูปครึ่งวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$

รัศมี 3 หน่วย เมื่อ $x \geq 0$ (ดูรูปที่ 2)



รูปที่ 1 กราฟของ r



รูปที่ 2 กราฟของ r^{-1}

(3) จากรูปที่ 1 จะได้ว่า

$$D_r = [-3, 3] \text{ และ } R_r = [0, 3]$$

$$\text{ดังนั้น } D_{r^{-1}} = R_r = [0, 3]$$

$$R_{r^{-1}} = D_r = [-3, 3]$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3|x| + |y| \leq 9\}$

(1) จงหา r^{-1}

(2) จงเขียนกราฟของ r และของ r^{-1}

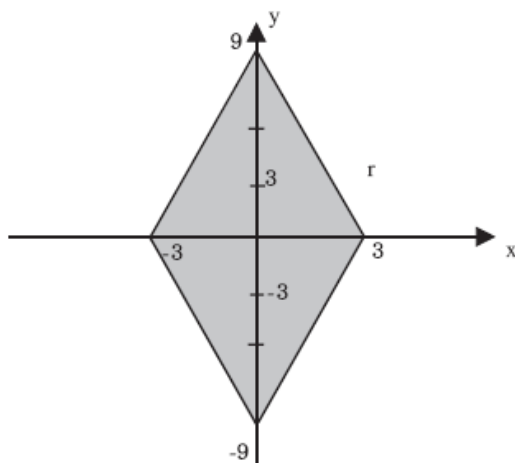
(3) จงหา D_r , R_r , $D_{r^{-1}}$ และ $R_{r^{-1}}$

วิธีทำ (1) จาก $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3|x| + |y| \leq 9\}$

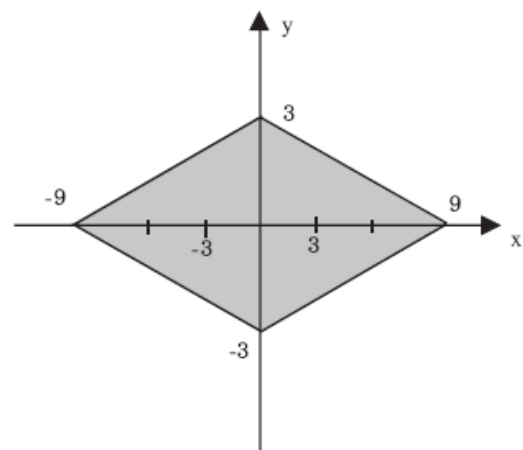
$$\therefore r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3|y| + |x| \leq 9\}$$

(2) กราฟของ r เป็นเซตของจุดที่อยู่ภายในหรือบนรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดมุมที่ $(-3,0)$, $(3,0)$, $(0,9)$ และ $(0,-9)$ (ดูรูปที่ 1)

กราฟของ r^{-1} เป็นเซตของจุดที่อยู่ภายในหรือบนรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดมุมที่ $(0,-3)$, $(0,3)$, $(9,0)$ และ $(-9,0)$ (ดูรูปที่ 2)



รูปที่ 1 กราฟของ r



รูปที่ 2 กราฟของ r^{-1}

(3) จากรูปที่ 1 จะได้ว่า

$$D_r = [-3, 3] \text{ และ } R_r = [-9, 9]$$

$$\text{ดังนั้น } D_{r^{-1}} = R_r = [-9, 9]$$

$$R_{r^{-1}} = D_r = [-3, 3]$$

ข้อสังเกต ในกรณีที่หา r^{-1} โดยการสลับตัวแปร x และ y ในเงื่อนไขของ r แล้วได้เงื่อนไขใหม่ ซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงไปจากเดิม จะได้ว่ากราฟของ r และกราฟของ r^{-1} เหมือนกัน

กิจกรรมที่ 6

เมื่อนักศึกษา ศึกษาเนื้อหาเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 6

แบบฝึกหัดที่ 6

ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

กำหนดความสัมพันธ์ r ในข้อต่อไปนี้

ก. จงหา r^{-1}

ข. จงเขียนกราฟของ r และของ r^{-1}

ค. จงหา $D_r, R_r, D_{r^{-1}}$ และ $R_{r^{-1}}$

1. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y \geq |x| + 2\}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a full page of handwriting practice paper. It features multiple sets of horizontal dashed lines spaced evenly down the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no margins or additional markings.

ตอนที่ 3 ฟังก์ชัน

เรื่องที่ 1 ความหมายของฟังก์ชัน

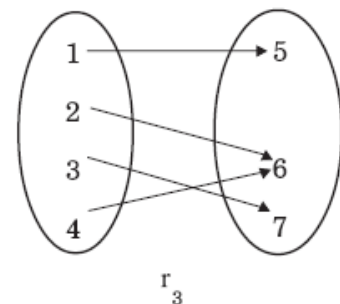
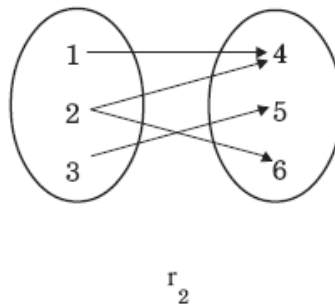
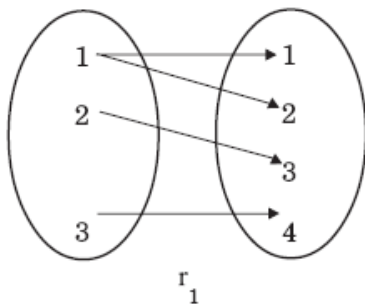
1.1 บทนิยามของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $r_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,4)\}$

$r_2 = \{(1,4), (2,4), (2,6), (3,5)\}$

$r_3 = \{(1,5), (2,6), (3,7), (4,6)\}$

เราสามารถเขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ได้ดังนี้



จากแผนภาพจะเห็นว่า การจับคู่กันของสมาชิกตัวหน้าของกลุ่มอันดับกับสมาชิกตัวหลังของกลุ่มอันดับของความสัมพันธ์ r_1 , r_2 และ r_3 แตกต่างกัน คือ ใน r_1 และ r_2 มีสมาชิกบางตัวที่เป็นสมาชิกตัวหน้าของกลุ่มอันดับจับคู่กับสมาชิกตัวหลังของกลุ่มอันดับเกินกว่า 1 ตัว เช่น

ใน r_1 ; 1 จับคู่กับ 1 และ 1 จับคู่กับ 2

ใน r_2 ; 2 จับคู่กับ 4 และ 2 จับคู่กับ 6

ในความสัมพันธ์ r_3 จะพบว่า สมาชิกตัวหน้าของกลุ่มอันดับแต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกตัวหลังของกลุ่มอันดับเพียงตัวเดียว ซึ่งความสัมพันธ์ที่มีลักษณะเช่น r_3 นี้เราเรียกว่า “ฟังก์ชัน”

บทนิยาม ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองกลุ่มอันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน

จากบทนิยาม กล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งถ้ามี $(x, y_1) \in f$ และ $(x, y_2) \in f$ แล้ว $y_1 = y_2$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ m, n และ p ไม่มีคู่ใดเท่ากัน และ

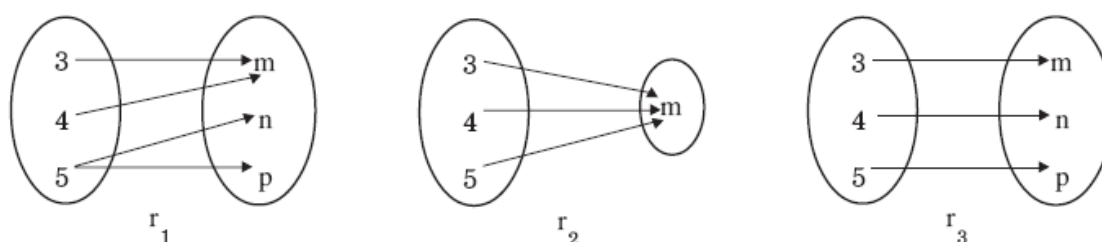
$$r_1 = \{(3,m), (4,m), (5,n), (5,p)\}$$

$$r_2 = \{(3,m), (4,m), (5,m)\}$$

$$r_3 = \{(3,m), (4,n), (5,p)\}$$

จงหาว่า ความสัมพันธ์ใดบ้างเป็นฟังก์ชัน

วิธีทำ แผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของโดเมนกับสมาชิกของเรนจ์ของ r_1, r_2 และ r_3 เขียนได้ดังนี้



r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกันคือ $(5,n), (5,p)$

r_2 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันเลย

หมายเหตุ ความสัมพันธ์ที่เขียนแบบแจกแจงสมานั้น ถ้าสมาชิกตัวหน้าของแต่ละคู่อันดับไม่เหมือนกันเลย สรุปได้ว่า ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ r ซึ่งเขียนแบบบอกเงื่อนไข เป็นฟังก์ชันหรือไม่ อาจใช้วิธีการดังนี้

วิธีที่ 1 จาก $(x,y) \in r$ เขียน y ในรูปของ x แล้วพิจารณาค่า y ถ้าแต่ละค่าของ x ซึ่งสามารถหาค่า y ได้เพียงค่าเดียว สรุปได้ว่า r เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ามีบางค่าของ x ซึ่งทำให้หา y ได้มากกว่า 1 ค่า สรุปได้ว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน

วิธีที่ 2 จาก $(x,y_1) \in r$ และ $(x,y_2) \in r$ เขียน y_1 และ y_2 ในรูปของ x ถ้าสรุปได้ว่า $y_1 = y_2$ แล้ว แสดงว่า r เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ามีกรณีที่ $y_1 \neq y_2$ แล้ว แสดงว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน

วิธีที่ 3 โดยใช้กราฟ

กำหนดความสัมพันธ์ r ให้ลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน y และให้ตัดกราฟของ r

(1) ถ้าเส้นตรงแต่ละเส้นตัดกราฟของ r ได้เพียงจุดเดียว แสดงว่า r เป็นฟังก์ชัน

(2) ถ้ามีเส้นตรงบางเส้นที่ตัดกราฟของ r มากกว่า 1 จุดแล้ว r จะไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาว่า $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 3\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ

วิธีที่ 1 จาก $y = x^2 + 3$

สำหรับแต่ละค่าของ x จะหา $x^2 + 3$ ได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น แสดงว่า r เป็นฟังก์ชัน

วิธีที่ 2 ให้ $(x,y_1) \in r$ และ $(x,y_2) \in r$

จะได้ว่า $y_1 = x^2 + 3$ และ $y_2 = x^2 + 3$

สรุปได้ว่า $y_1 = y_2$ เสมอ

ดังนั้น r เป็นฟังก์ชัน

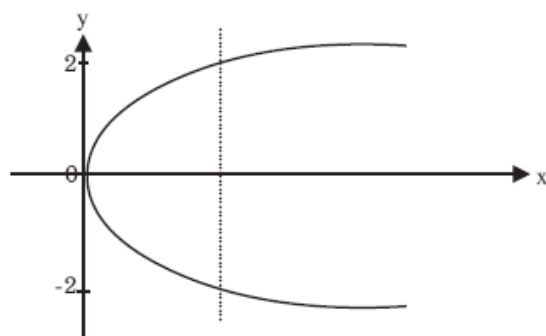
ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาว่า $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $(1,1) \in r$ และ $(1,-1) \in r$

ดังนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชัน

หรือ ถ้าพิจารณาโดยวิธีกราฟ

จาก $y^2 = x$ นำมาเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า มีเส้นตรงที่ลากขนานกับแกน y ตัดกราฟได้ 2 จุด ดังนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชัน ทั้งนี้เพราะแต่ละค่าของ x จะได้ $(x, \sqrt{x}) \in r$ และ $(x, -\sqrt{x}) \in r$

ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์

ในกรณีที่ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน เราสามารถเขียน $y = f(x)$ แทน $(x,y) \in f$ ได้ เรียก $f(x)$ ว่า “ฟังก์ชัน f ที่ x ” อ่านว่า เอฟที่เอ็กซ์ หรือ เอฟเอ็กซ์ เช่น ให้ $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ จะได้ว่า

$(1,2) \in f$ ดังนั้น $2 = f(1)$ หรือ $f(1) = 2$

$(2,3) \in f$ ดังนั้น $3 = f(2)$ หรือ $f(2) = 3$

$(3,4) \in f$ ดังนั้น $4 = f(3)$ หรือ $f(3) = 4$

หรือ ถ้า $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1\}$ เราสามารถเขียนใหม่ได้ว่า $f(x) = x^2 + 1$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 1$ เมื่อ $x = 1, 2, 3$ จงเขียนฟังก์ชัน f ในรูปของคู่อันดับแบบแจกแจงสมาชิก

วิธีทำ $f(x) = x^2 + 1$ เมื่อ $x = 1, 2, 3$
 $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ ดังนั้น $(1, 2) \in f$
 $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ ดังนั้น $(2, 5) \in f$
 $f(3) = 3^2 + 1 = 10$ ดังนั้น $(3, 10) \in f$
 $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 10)\}$

กิจกรรมที่ 7

เมื่อนักศึกษา ศึกษาเนื้อหาเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 7

แบบฝึกหัดที่ 7

ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. จงตรวจสอบ ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $r = \{(2, 3), (4, 5), (6, 7)\}$

.....

(2) $r = \{(1, 5), (3, 7), (2, 6), (1, 6)\}$

.....

(3) $r = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)\}$

.....

(4) $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x + y = 4\}$

.....

(5) $r = \{(x, y) \in R \times R \mid 2x + y = 8\}$

.....

2. ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน

$$(1) r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

$$(2) r = \{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| = 4\}$$

$$(3) r = \{(x, y) \in R \times R \mid y^2 = x\}$$

$$(4) r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x - 2\}$$

3. กำหนดฟังก์ชัน f ในข้อต่อไปนี้ จงเขียน f ในรูปเซตของคู่อันดับแบบแจกแจงสมาชิก

$$(1) f(x) = 2x - 3 \text{ เมื่อ } x = 1, 2, 3, 4$$

$$(2) f(x) = x^2 - 1 \text{ เมื่อ } x = 0, 1, 2, 3$$

$$(3) f(x) = |x| + 2 \text{ เมื่อ } x = 0, 1, 2, 3$$

1.2 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นโดเมนของฟังก์ชัน คือ โดเมนของความสัมพันธ์ และเรนจ์ของฟังก์ชัน ก็คือเรนจ์ของความสัมพันธ์

การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน ก็ใช้วิธีการเดียวกันกับการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

บทนิยาม ถ้า f เป็นฟังก์ชัน

D_f (โดเมนของ f) คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของแต่ละคู่อันดับใน f

R_f (เรนจ์ของ f) คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน f

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(2,3), (4,6), (5,7), (8,10)\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f

วิธีทำ จาก $f = \{(2,3), (4,6), (5,7), (8,10)\}$

$$D_f = \{2, 4, 5, 8\}$$

$$R_f = \{3, 6, 7, 10\}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 2x + 3\}$

วิธีทำ จาก $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 2x + 3\}$

จะได้ $y = x^2 + 2x + 3$ จะพบว่า ถ้า $x \in \mathbb{R}$ จะหาค่า y ได้เสมอ

ดังนั้น $D_f = \mathbb{R}$

การหาเรนจ์ จาก $y = x^2 + 2x + 3$ โดยที่ $x \in \mathbb{R}$

$$y = (x^2 + 2x + 1) + 2$$

$$y = (x+1)^2 + 2$$

เนื่องจาก $y = (x+1)^2 \geq 0$ ดังนั้น $y = (x+1)^2 + 2 \geq 2$

$$\therefore R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 9}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f

วิธีทำ หาโดเมนของ f

จากสมการ $y = \sqrt{x^2 - 9}$ จะพบว่า

จะหาค่า y ได้เมื่อ $x^2 - 9 \geq 0$

$$(x-3)(x+3) \geq 0$$

$$x \leq -3 \text{ หรือ } x \geq 3$$

ดังนั้น $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ หรือ } x \geq 3\}$

หาเรนจ์ของ f

จากสมการ $y = \sqrt{x^2 - 9}$ เมื่อ $x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

จะเห็นว่า $x^2 - 9 \geq 0$

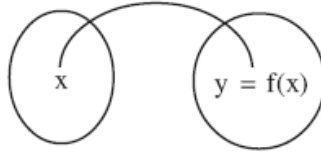
$$\therefore \sqrt{x^2 - 9} \geq 0$$

$$y \geq 0$$

ดังนั้น $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

1.3 ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ $(x,y) \in f$ แล้ว เรากล่าวได้ว่า y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x
ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วย $f(x)$ ซึ่งสามารถเขียนแทน $y = f(x)$ ด้วยแผนภาพดังนี้



เช่น กำหนด $y = f(x) = x^2 - 1$

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0$$

ดังนั้น ค่าของฟังก์ชัน f ที่ 1 คือ 0

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f(x) = x^2 + 2x - 3$ จงหาค่าของ $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(a)$, $f(a+b)$

และ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เมื่อ $h \neq 0$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$$1. \quad f(0) = 0^2 + 2(0) - 3 = -3$$

$$2. \quad f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$$

$$3. \quad f(1) = 1^2 + 2(1) - 3 = 0$$

$$4. \quad f(2) = 2^2 + 2(2) - 3 = 5$$

$$5. \quad f(3) = 3^2 + 2(3) - 3 = 12$$

$$6. \quad f(a) = a^2 + 2a - 3$$

$$7. \quad f(a+b) = (a+b)^2 + 2(a+b) - 3$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad f(x+h) &= (x+h)^2 + 2(x+h) - 3 \\
 &= x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 3 \\
 f(x+h) - f(x) &= (x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 3) - (x^2 + 2x - 3) \\
 &= x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 3 - x^2 - 2x + 3 \\
 &= 2xh + h^2 + 2h \\
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= 2x + h + 2
 \end{aligned}$$

กิจกรรมที่ 8

เมื่อนักศึกษา ศึกษาเนื้อหาในเรื่องที่ 1.2 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน และเรื่องที่ 1.3 ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x แล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 8

แบบฝึกหัดที่ 8

ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$(1) f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (5,6), (7,8)\}$$

.....

.....

$$(2) f = \{(6,3), (7,3), (8,3), (9,3), (10,3)\}$$

.....

.....

$$(3) f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$$

.....

.....

$$(4) f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + 2x + 7\}$$

.....

.....

$$(5) f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x| + 1\}$$

.....

.....

.....

2. กำหนด $f(x) = x^2 + 2x - 5$ จงหา $f(2)$, $f(x-1)$

.....

.....

.....

.....

3. กำหนด $f(x) = x^2 + 3x + 6$ จงหา $f(-3)$, $f(x+1)$

.....

.....

.....

4. กำหนด $f(x) = x^2 + 1$ เมื่อ $-2 \leq x \leq 2$ จงหาค่าของ $f(0)$, $f(-2)$, $f(3)$

.....

.....

.....

.....

1.4 ฟังก์ชันจากเซตหนึ่งไปอีกเซตหนึ่ง

1.4.1 ฟังก์ชันจาก A ไป B (Function from A to B)

บทนิยาม กำหนดให้ A และ B เป็นเซต f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

- (1) f เป็นฟังก์ชัน
- (2) $D_f = A$
- (3) $R_f \subset B$

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \rightarrow B$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 8\}$

ถ้า $f = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,4), (5,6)\}$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่

วิธีทำ จาก f ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

- (1) f เป็นฟังก์ชัน
 - (2) $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$
 - (3) $R_f = \{2, 4, 6\} \subset B$
- $\therefore f : A \rightarrow B$

1.4.2 ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (Function from A onto B)

บทนิยาม f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ

- (1) f เป็นฟังก์ชัน
- (2) $D_f = A$
- (3) $R_f = B$

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b, c\}$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B หรือไม่

$$(1) f_1 = \{(1,b), (2,c), (3,a)\}$$

$$(2) f_2 = \{(1,a), (1,b), (1,c)\}$$

$$(3) f_3 = \{(1,a), (2,b), (3,b)\}$$

วิธีทำ (1) จาก $f_1 = \{(1,b), (2,c), (3,a)\}$

จะพบว่า f_1 เป็นฟังก์ชัน ; $D_{f_1} = A$ และ $R_{f_1} = B$

f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

$$(2) f_2 = \{(1,a), (1,b), (1,c)\}$$

จะพบว่า f_2 เป็นฟังก์ชัน ; $D_{f_2} \neq A$ และ $R_{f_2} = B$

f_2 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

$$(3) f_3 = \{(1,a), (2,b), (3,b)\}$$

จะพบว่า f_3 เป็นฟังก์ชัน ; $D_{f_3} = A$ แต่ $R_{f_3} \neq B$

f_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

1.4.3 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (One to one function)

บทนิยาม กำหนดให้ $f : A \rightarrow B$

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ ถ้า $y \in R_f$ แล้ว

จะมี $y \in D_f$ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $(x,y) \in f$

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

จากบทนิยามข้างต้น จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ

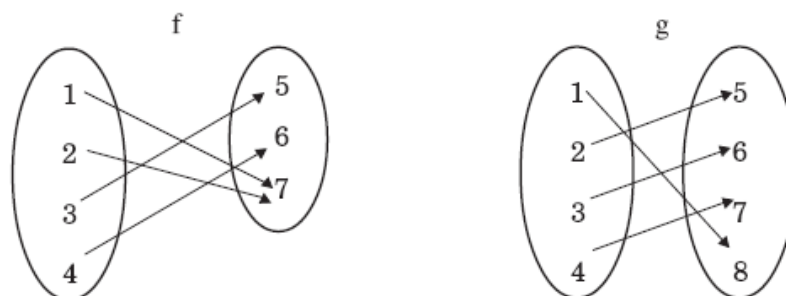
ถ้า $(x_1,y) \in f$ และ $(x_2,y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

$$(1) f = \{(1,7), (2,7), (3,5), (4,6)\}$$

$$(2) g = \{(1,8), (2,5), (3,6), (4,7)\}$$

วิธีทำ f และ g แสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้



จากแผนภาพ จะเห็นว่า

- (1) $f = \{(1,7), (2,7), (3,5), (4,6)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 เนื่องจากสมาชิกใน R_f บางตัวโดนจับคู่มากกว่า 1 ครั้ง คือ $(1,7) \in f$ และ $(2,7) \in f$
- (2) $g = \{(1,8), (2,5), (3,6), (4,7)\}$ เป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 เนื่องจากแต่ละสมาชิกใน R_g ถูกจับคู่โดยสมาชิก D_g เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ในกรณีที่กำหนดฟังก์ชันออกมาในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไข การตรวจสอบดูว่าฟังก์ชันนั้น เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ สามารถทำได้ 3 วิธีง่าย ๆ ในทำนองเดียวกับการตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ ดังนี้

วิธีที่ 1 กำหนดให้ $f : A \rightarrow B$ ซึ่งประกอบด้วยคู่อันดับ (x,y) ซึ่งมีเงื่อนไข $P(x,y)$ จากเงื่อนไข $P(x,y)$ ให้เขียน x ในรูปของ y

1. ถ้าแต่ละสมาชิก y ใน R_f ให้ค่า x เพียงค่าเดียวแล้ว f จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. ถ้ามี $y \in R_f$ ซึ่งให้ค่า x เกินกว่า 1 ค่า แล้ว f จะไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ (1) $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x+y-3 = 0\}$

$$(2) \ g = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9-x^2}\}$$

จงตรวจสอบว่า f, g เป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่

วิธีทำ (1) จาก $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x+y-3 = 0\}$

$$x+y-3 = 0$$

$$y = 3-x \text{ หรือ } f(x) = 3-x$$

จะเห็นว่าทุกค่า $x \in \mathbb{R}$ จะหาค่า $y \in \mathbb{R}$ ได้เสมอ และได้เพียงค่าเดียว

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ (เพราะ f เป็นฟังก์ชัน, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f \subset \mathbb{R}$)

และจาก $x+y-3 = 0$

$$x = 3-y$$

จะพบว่า แต่ละค่า $y \in R_f$ จะได้ค่า x เพียงค่าเดียว

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$$(2) \ g = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9-x^2}\}$$

จะเห็นว่า ถ้า $y = 0$ จะได้ $x = \pm 3$

จะได้ว่า $(3,0) \in g$ และ $(-3,0) \in g$

ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีที่ 2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน ให้ $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$

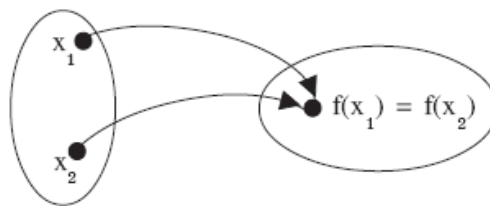
1. ถ้าสามารถพิสูจน์ได้ว่า $x_1 = x_2$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. ถ้า x_1 และ x_2 เป็นไปได้ที่จะไม่เท่ากัน แล้ว f จะไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จากข้อความข้างต้น อาจเขียนใหม่ได้ว่า

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งได้ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ x_1, x_2 ในโดเมน

ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

สามารถแสดงได้ด้วยแผนภาพดังนี้



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x - 3y + 5 = 0\}$
 $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 5x + 4\}$

จงพิจารณาว่า f, g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีทำ (1) จาก $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x - 3y + 5 = 0\}$

$$y = \frac{2x+5}{3}$$

ให้ $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ ดังนั้น

$$\text{จะได้ } y = \frac{2x_1+5}{3} \quad \text{และ } y = \frac{2x_2+5}{3}$$

$$\frac{2x_1+5}{3} = \frac{2x_2+5}{3}$$

$$2x_1+5 = 2x_2+5$$

$$x_1 = x_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$$(2) \text{ จาก } g = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 5x + 4\}$$

$$\text{ให้ } (x_1, y) \in f \text{ และ } (x_2, y) \in f$$

$$\text{ดังนั้น } x_1^2 - 5x_1 + 4 = x_2^2 - 5x_2 + 4$$

$$x_1^2 - x_2^2 - 5x_1 + 5x_2 = 0$$

$$(x_1^2 - x_2^2) - 5(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 5(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 5) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } x_1 - x_2 = 0 \text{ หรือ } x_1 - x_2 - 5 = 0$$

$$x_1 = x_2 \text{ หรือ } x_1 = 5 - x_2$$

แสดงว่า x_1 และ x_2 ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

เช่น ถ้า $x_2 = 0$ จะได้ $x_1 = 0$ หรือ 5

ทั้ง $x_1 = 5$ และ $x_2 = 0$ จะได้ $y = 4$ แสดงว่า $(5, 4) \in g$ และ $(0, 4) \in g$

ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

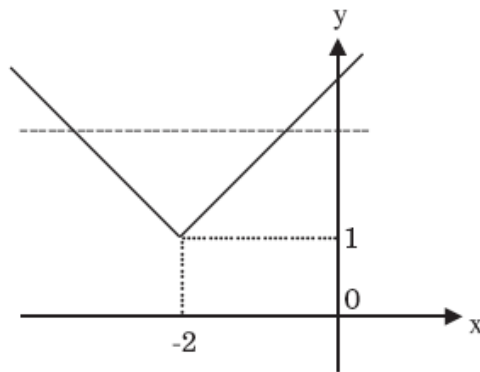
วิธีที่ 3 โดยใช้กราฟ

ในกรณีที่สามารวาดกราฟของฟังก์ชัน f ได้ การตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง อาจพิจารณาจากกราฟได้ โดยการลากเส้นตรงให้ขนานกับแกน x และให้ตัดกับกราฟของ f

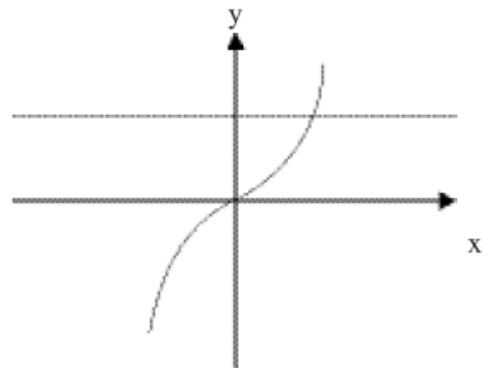
(1) ถ้าเส้นตรงทุกเส้นตัดกราฟเพียงจุดเดียวเท่านั้น แล้ว ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(2) ถ้ามีเส้นตรงบางเส้นตัดกราฟของ f มากกว่าหนึ่งจุด แล้ว ฟังก์ชัน f จะไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน f และ g ที่กำหนดให้ตามรูป เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่



$$f = \{(x,y) \mid y = |x+2| + 1\}$$



$$g = \{(x,y) \mid y = x^3\}$$

วิธีทำ

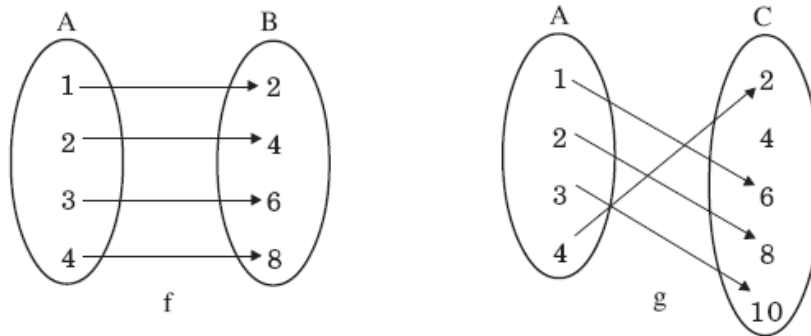
$f = \{(x,y) \mid y = |x+2| + 1\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะมีเส้นตรงบางเส้นที่ขนานกับแกน x และตัดกราฟของ f ได้มากกว่า 1 จุด

$g = \{(x,y) \mid y = x^3\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะถ้าลากเส้นตรงให้ขนานกับแกน x และตัดกราฟของ f จะตัดเพียงจุดเดียวเท่านั้น

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B (one-to-one function from A onto B) หรือเป็นการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one correspondence) ก็ต่อเมื่อ

- (1) f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
- (2) $D_f = A$
- (3) $R_f = B$

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \xrightarrow{1-1 \text{ ทั่วถึง}} B$ เช่น



จากรูป $f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปทั่วถึง B

$g = \{(1,6), (2,8), (3,10), (4,2)\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป C

ข้อสังเกต ในกรณีที่ A และ B เป็นเซตจำกัด

- (1) ถ้ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B แล้ว $n(A) = n(B)$
- (2) ถ้ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B แล้ว $n(A) \leq n(B)$
- (3) ถ้า $n(A) > n(B)$ แล้ว ไม่สามารถสร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ได้

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^3 = x\}$

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$ หรือไม่

วิธีทำ (1) พิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชัน

$$\text{จาก } y^3 = x \text{ จะได้ } y = \sqrt[3]{x}$$

จะพบว่าแต่ละค่าของ x ในโดเมน จะให้ค่า y เพียงค่าเดียวเท่านั้น

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

(2) พิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

ให้ $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ ดังนั้น

$$y^3 = x_1 \text{ และ } y^3 = x_2$$

$$\text{ดังนั้น } x_1 = x_2$$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(3) หาโดเมนของ f

$$\text{จาก } y^3 = x \text{ จะได้ว่า } y = \sqrt[3]{x}$$

จะพบว่า ถ้า $x \in \mathbb{R}$ แล้ว จะสามารถหาค่า y ได้เสมอ

$$\text{ดังนั้น } D_f = \mathbb{R}$$

(4) หาเรนจ์ของ f

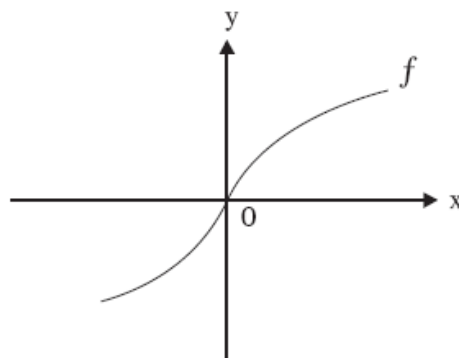
$$\text{จากสมการ } y^3 = x$$

จะพบว่า ถ้า $y \in \mathbb{R}$ แล้ว จะสามารถหาค่า x ได้เสมอ

$$\text{ดังนั้น } R_f = \mathbb{R}$$

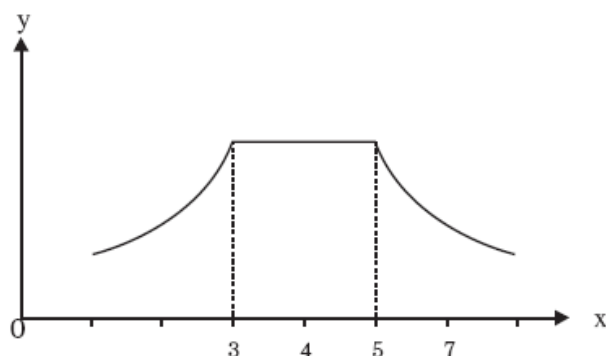
จากข้อ (1)-(4) สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$ ซึ่งมีลักษณะกราฟ

ดังนี้



1.4.4 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ให้พิจารณารูปของฟังก์ชันต่อไปนี้



ถ้า $0 \leq x \leq 3$ จะพบว่า กราฟของฟังก์ชันดังกล่าวมีลักษณะสูงขึ้น หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า ถ้า x ยิ่งมากขึ้น ค่า y หรือ $f(x)$ ก็จะมีค่ามากขึ้นด้วย เราเรียกฟังก์ชันในลักษณะเช่นนี้ว่า ฟังก์ชันเพิ่ม

ถ้า $3 \leq x \leq 5$ จะพบว่า กราฟของฟังก์ชันดังกล่าวมีลักษณะคงตัวโดยตลอด หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า ไม่ว่า x จะมีค่าเท่าใดก็ตาม $f(x)$ จะยังคงมีค่าเท่าเดิมเสมอ เราเรียกฟังก์ชันในลักษณะเช่นนี้ว่า ฟังก์ชันคงตัว

ถ้า $5 \leq x \leq 7$ จะพบว่า กราฟของฟังก์ชันดังกล่าวมีลักษณะลดลง หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า ถ้า x ยิ่งมีค่ามากขึ้น ค่า y หรือ $f(x)$ ก็จะมีค่าลดลง เราเรียกฟังก์ชันในลักษณะเช่นนี้ว่า ฟังก์ชันลด

ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดนั้นเราต้องกำหนดช่วงที่จะพิจารณาด้วยว่าพิจารณาในช่วงใด ทั้งนี้เพราะว่า กราฟของฟังก์ชันบางฟังก์ชันอาจจะมีบางช่วงเป็นฟังก์ชันเพิ่ม บางช่วงเป็นฟังก์ชันลด บางช่วงเป็นฟังก์ชันคงตัว

ถ้าพิจารณาช่วง $[0, 5]$ จะพบว่า กราฟของฟังก์ชัน จะมีทั้งเพิ่มขึ้นและคงตัว ถ้าเป็นไปในลักษณะเช่นนี้ เราเรียกฟังก์ชันในช่วงนี้ว่า ฟังก์ชันไม่ลด (มีแต่เพิ่มกับคงตัว)

ทำนองเดียวกัน ในช่วง $[3, 7]$ จะพบว่ากราฟของฟังก์ชัน จะมีทั้งลดและคงตัว ถ้าเป็นไปในลักษณะเช่นนี้ เราเรียกฟังก์ชันในช่วงนี้ว่า ฟังก์ชันไม่เพิ่ม (มีแต่ลดกับคงตัว)

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ และ $A \subset D_f$

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว

$$f(x_1) < f(x_2)$$

f เป็นฟังก์ชันลดใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว

$$f(x_1) > f(x_2)$$

การพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดนั้น ทำได้โดย

1. การเขียนกราฟ

2. อาศัยบทนิยาม ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ และ $x_1 < x_2$

ขั้นที่ 2 หาค่า $f(x_1)$ และ $f(x_2)$

ขั้นที่ 3 พิจารณา $f(x_1)$ และ $f(x_2)$

- ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มใน A

- ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันลดใน A

ข้อควรระวัง

1. ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน A แล้ว จะสรุปว่า f เป็นฟังก์ชันลดใน A ไม่ได้

2. ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันลดใน A แล้ว จะสรุปว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน A ไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = 2x+3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

วิธีทำ ให้ $x_2 > x_1$

$$2x_2 > 2x_1$$

$$2x_2+3 > 2x_1+3$$

$$f(x_2) > f(x_1)$$

ซึ่งข้อความดังกล่าวเป็นจริงทุก ๆ ค่าของ x

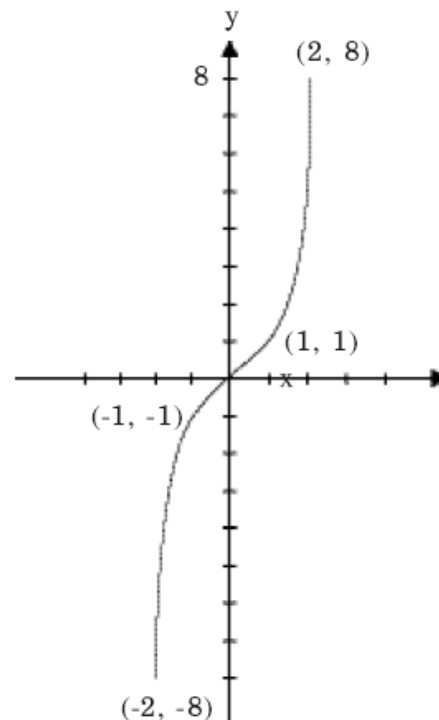
ดังนั้น ช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f(x) = x^3$ จงเขียนกราฟเพื่อพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3$

จะเห็นว่า $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

เขียนกราฟได้ดังนี้



จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = 3x-2$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดใน $\mathbb{R}$

วิธีทำ กำหนด $f(x) = 3x-2$ โดยที่ $D_f = \mathbb{R}$

ให้ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ถ้า $x_1 < x_2$

จะได้ว่า $3x_1 < 3x_2$

$$3x_1 - 2 < 3x_2 - 2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

นั่นคือ ถ้า $x_1 < x_2$ จะได้ว่า $f(x_1) < f(x_2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน $\mathbb{R}$

กิจกรรมที่ 9

เมื่อนักศึกษา ศึกษาเนื้อหาเรื่องที่ 1.4 ฟังก์ชันจากเซตหนึ่งไปอีกเซตหนึ่งจบแล้ว ให้นักศึกษา
ทำแบบฝึกหัดที่ 9

แบบฝึกหัดที่ 9

ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. กำหนด $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{4,5\}$ จงเขียนฟังก์ชันทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และฟังก์ชันจาก B ไป A

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. กำหนด $A = \{a,b,c\}$ และ $B = \{m,n,p\}$ จงเขียนฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปทั่วถึง B ทั้งหมด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. กำหนด $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{4,5,6\}$

$$\text{และ } f_1 = \{(1,4), (2,5), (3,4)\}$$

$$f_2 = \{(1,4), (2,6), (3,5)\}$$

$$f_3 = \{(1,4), (2,4), (3,5)\}$$

$$f_4 = \{(4,1), (5,2), (6,3)\}$$

$$f_5 = \{(4,2), (5,1), (6,2)\}$$

$$f_6 = \{(4,1), (5,1), (6,1)\}$$

$$f_7 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

$$f_8 = \{(4,4), (5,5), (6,6)\}$$

จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่า มีฟังก์ชันใดบ้างที่เป็น

1. ฟังก์ชันจาก A ไป B
2. ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B
3. ฟังก์ชันจาก B ไป A
4. ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A
5. ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง A
6. ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง B
7. ฟังก์ชัน 1-1

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ ฟังก์ชันใดบ้างที่เป็นฟังก์ชัน 1-1

(1) $f(x) = 3x-2$

(2) $g(x) = x^2 - x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ ฟังก์ชันใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือฟังก์ชันลด ในเซตที่กำหนดให้

(1) $f(x) = -2x+7, \mathbb{R}$

(2) $f(x) = -x^2 + 3, (-\infty, 0]$

(3) $f(x) = x^2 + 1, [0, \infty)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เรื่องที่ 2 ชนิดของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก

2.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function)

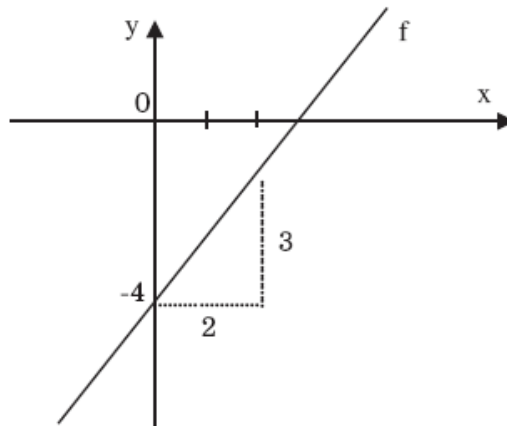
ฟังก์ชันเชิงเส้น หมายถึง ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax+b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
เช่น $f(x) = x+1$, $f(x) = 2x$, $f(x) = 3$, $f(x) = 3x+2$

หมายเหตุ

1. กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = ax+b$ จะเป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ a และมีระยะตัดแกน y เท่ากับ b ดังนั้นจึงเป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน y
2. ฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = ax+b$ เมื่อ $a = 0$ จะได้ฟังก์ชันอยู่ในรูป $f(x) = b$ เราเรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันคงตัว (Constant Function) ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงขนานกับแกน x มีระยะตัดแกน y เท่ากับ b

ตัวอย่างที่ 1 ให้ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$ จงสร้างกราฟของ $f(x)$ นี้

วิธีทำ



$f(x) = \frac{3}{2}x - 4$ เมื่อนำมาเขียนเป็นกราฟ จะได้กราฟเส้นตรง

ที่มีความชัน เท่ากับ $\frac{3}{2}$ และมีระยะตัดแกน y เท่ากับ -4

ตัวอย่างที่ 2 แม่ค้าขายมะนาว จะนำมะนาวออกขาย 1,000 ผล ถ้ามะนาวราคาผลละ 1 บาท และจะนำมะนาวออกขาย 3,000 ผล ถ้าราคามะนาวผลละ 2 บาท จงสร้างฟังก์ชัน f เมื่อ f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่ง $f(x)$ เป็นจำนวนมะนาวที่จะนำออกขาย และ x เป็นราคามะนาวต่อผล

วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

$$f(x) = ax + b \dots\dots\dots(1)$$

เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว, $x \in I^+$

ถ้า $x = 1$ แล้ว $f(x) = 1,000$ นำไปแทนค่าใน (1)

$$1,000 = a(1) + b$$

$$1,000 = a + b \dots\dots\dots(2)$$

ถ้า $x = 2$; $f(x) = 3,000$ แทนค่าใน (1)

$$3,000 = a(2) + b$$

$$3,000 = 2a + b \dots\dots\dots(3)$$

$$(3) - (2) ; 2,000 = a$$

แทนค่า a ใน (2) ; $b = -1,000$

แทนค่า a และ b ใน (1) ;

$$f(x) = 2,000x - 1,000$$

หมายเหตุ ฟังก์ชันจากตัวอย่างนี้ ทางเศรษฐศาสตร์เรียกว่า “ฟังก์ชันอุปทาน” (Supply Function) ฟังก์ชันอุปทานเป็นความสัมพันธ์ระหว่างราคาสินค้ากับปริมาณสินค้า ซึ่งผู้ขายยินดีจะนำออกขาย โดยปกติ ฟังก์ชันอุปทานเป็นฟังก์ชันเพิ่มเสมอ เพราะถ้าราคาสินค้าสูง ผู้ขายจะนำสินค้าออกขายมาก

2.2 ฟังก์ชันขั้นบันได (Step Function)

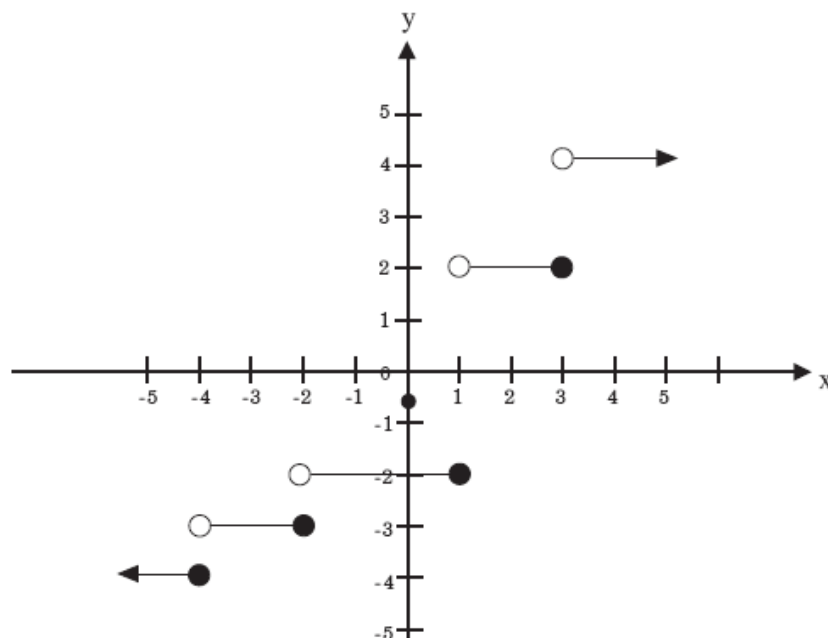
ฟังก์ชันขั้นบันได หมายถึง ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ และมีค่าฟังก์ชันคงตัวเป็นช่วง ๆ มากกว่า 2 ช่วง กราฟของฟังก์ชันนี้มีรูปเป็นขั้นบันได

ในชีวิตประจำวันของเรา จะพบสิ่งที่เรียกว่าฟังก์ชันขั้นบันไดบ่อย เช่น อัตราค่าธรรมเนียมในการส่งรษณีย์ อัตราภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา อัตราค่าธรรมเนียมในการส่งพัสดุภัณฑ์ทางไปรษณีย์ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{เมื่อ } x > 3 \\ 2 & \text{เมื่อ } 1 < x \leq 3 \\ -2 & \text{เมื่อ } -2 < x \leq 1 \\ -3 & \text{เมื่อ } -4 < x \leq -2 \\ -4 & \text{เมื่อ } x \leq -4 \end{cases}$$

กราฟของฟังก์ชัน f มีลักษณะดังนี้



2.3 ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function)

ฟังก์ชันกำลังสอง หมายถึง ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$

เช่น $f(x) = x^2 + 3x - 4$; $f(x) = 3x^2 + 1$

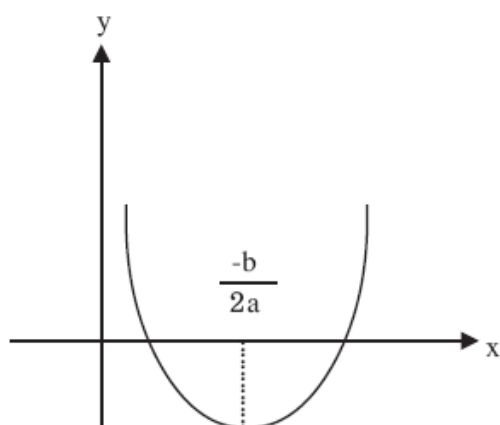
กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะเป็นรูปพาราโบลา ซึ่งเป็นพาราโบลาหงายหรือพาราโบลาคว่ำเท่านั้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนจริง a ว่าเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ

1. เมื่อ $a > 0$ จะได้รูปพาราโบลาหงาย จุดยอดของพาราโบลาจะอยู่ ณ จุด ซึ่ง

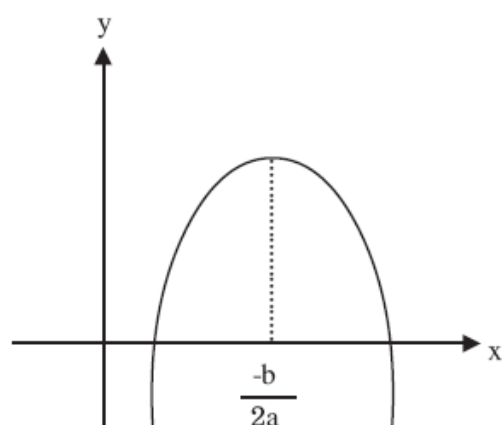
$$x = \frac{-b}{2a} \text{ และ } y = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (\text{ดูรูป ก.})$$

2. เมื่อ $a < 0$ จะได้รูปพาราโบลาคว่ำ จุดยอดของพาราโบลาจะอยู่ ณ จุด ซึ่ง

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ และ } y = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (\text{ดูรูป ข.})$$



รูป ก. $a > 0$



รูป ข. $a < 0$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้าจำนวนสองจำนวนบวกกันได้เท่ากับ 30 เมื่อจำนวนหนึ่งคือ x จงสร้างฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นผลคูณของจำนวนทั้งสอง แล้วพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันชนิดใด

วิธีทำ เนื่องจาก จำนวนหนึ่งคือ x
และจำนวนทั้งสองบวกกันได้ 30
ดังนั้นอีกจำนวนหนึ่งคือ $30 - x$
ให้ $f(x)$ เป็นผลคูณของจำนวนทั้งสอง

$$f(x) = x(30 - x)$$

$$f(x) = 30x - x^2$$

ซึ่งอยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันกำลังสอง

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 2x - 3$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 + 2x - 3$; $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$

เนื่องจาก $a > 0$ ดังนั้นกราฟของ f จะเป็นรูปพาราโบลาหงาย

$$\text{ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1$$

$$\begin{aligned}\text{แทนค่า } x \text{ ใน } f(x) &= x^2 + 2x - 3 \\ &= (-1)^2 + 2(-1) - 3 \\ &= -4\end{aligned}$$

จุดยอดของกราฟอยู่ที่จุด $(-1, -4)$

กราฟตัดแกน x ที่จุด $y = 0$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3, 1$$

กราฟตัดแกน y ที่จุด $x = 0$; $f(x) = 0 + 0 - 3$

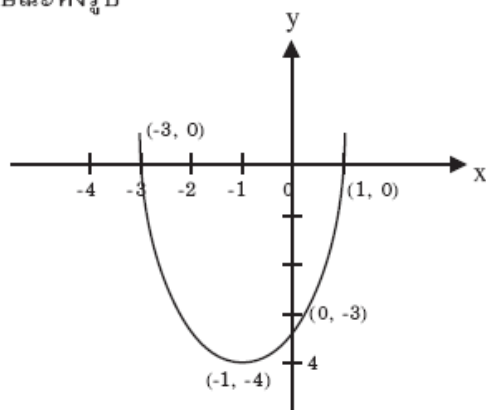
$$y = -3$$

แสดงว่า ระยะตัดแกน x คือ -3 และ 1

ระยะตัดแกน y คือ -3

จุดยอดหรือจุดวกกลับของกราฟอยู่ที่จุด $(-1, -4)$

กราฟของ f จะมีลักษณะดังรูป



2.4 ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute value Function)

ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ หมายถึง ฟังก์ชันที่ตัวแปรอยู่ในรูปของค่าสัมบูรณ์ เช่น

$$y = |x|, f(x) = |x-2|$$

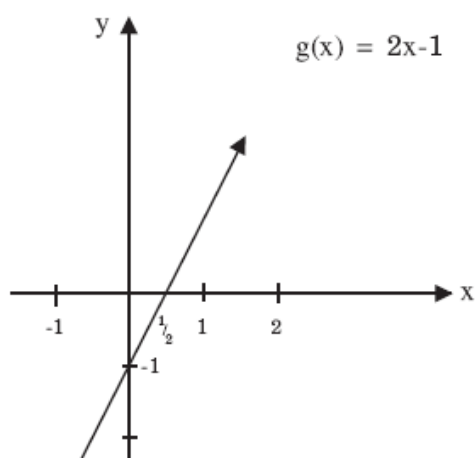
ตัวอย่างที่ 1 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = |2x-1|$

วิธีทำ สมมติให้ $g(x) = 2x-1$

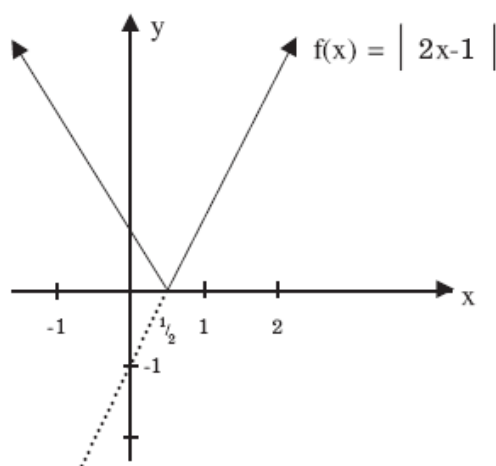
กราฟของฟังก์ชัน g เป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 2 ระวังตัดแกน $y = -1$

$$\text{เนื่องจาก } f(x) = |2x-1| = |g(x)|$$

ดังนั้นกราฟของ f จะเหมือนกราฟของ g ในส่วนที่ $g(x) \geq 0$ (เหนือหรือบนแกน x) แต่ในส่วนที่ $g(x) < 0$ (ใต้แกน x) กราฟของ f จะเกิดจากการกลับกราฟของ g ขึ้นไปด้านบนโดยให้สมมาตรกับกราฟของ g ตามแนวแกน x



กราฟของ g



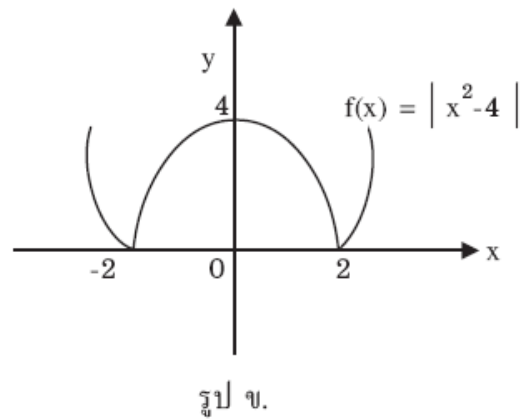
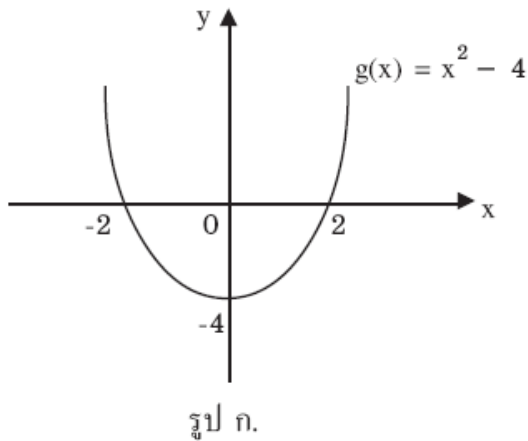
กราฟของ f

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของ $f(x) = |x^2 - 4|$

วิธีทำ สมมติให้ $g(x) = x^2 - 4$

กราฟของ g เป็นรูปพาราโบลาหงาย (ดูรูป ก.)

ดังนั้นกราฟของ f จะมีลักษณะดังรูป ข.



2.5 ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)

ฟังก์ชันพหุนาม หมายถึง ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นค่าคงตัว และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

ถ้า $a_n \neq 0$ แล้ว เรียกฟังก์ชันพหุนามดังกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับชั้นเท่ากับ n (เท่ากับเลขชี้กำลังของ x ที่มากที่สุดที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เท่ากับ 0)

ตัวอย่างที่ 1	ฟังก์ชันพหุนาม	ระดับชั้น (Degree)
1.	$f(x) = 2x+3$	1
2.	$f(x) = x^2+3x+2$	2
3.	$f(x) = 3x^3-4x^2+2$	3
4.	$f(x) = x^4 - 2$	4
5.	$f(x) = 10$	0

หมายเหตุ

1. ฟังก์ชัน $f(x) = 0$ เป็นฟังก์ชันพหุนามซึ่งไม่มีระดับชั้น
2. ฟังก์ชันเชิงเส้นทุกฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับชั้น 1 หรือ 0 หรือไม่มีระดับชั้น
3. ฟังก์ชันกำลังสองทุกฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับชั้น 2
4. จำนวนพจน์ในฟังก์ชันพหุนามจะต้องมีจำนวนจำกัด
5. ค่าคงตัว $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

2.6 ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational Function)

ฟังก์ชันตรรกยะ หมายถึง ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $q(x) \neq 0$

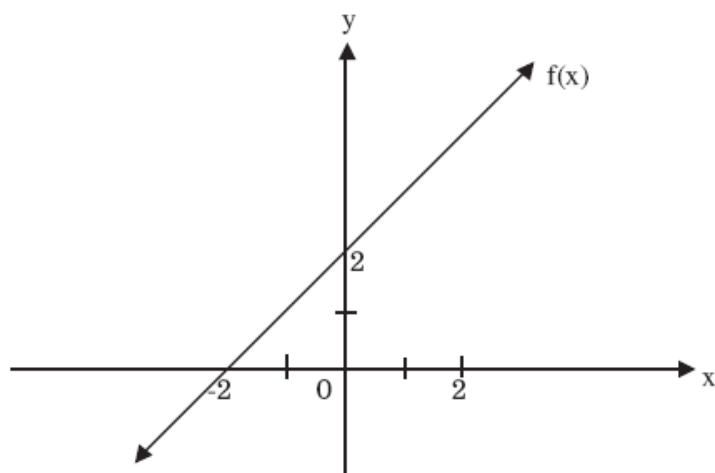
ตัวอย่างฟังก์ชันตรรกยะ ได้แก่ $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$; $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x-2}$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x-2}$
$$= \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \quad \text{เมื่อ } x-2 \neq 0$$

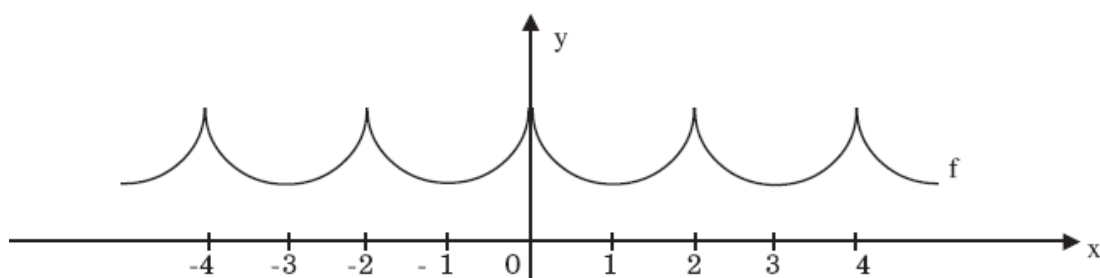
$f(x) = x+2 \quad \text{เมื่อ } x \neq 2$

จะเขียนกราฟได้ดังนี้



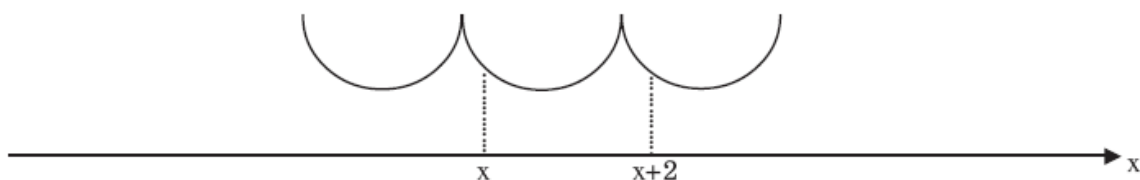
2.7 ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (Periodic Function)

ขอให้พิจารณารูปของฟังก์ชัน f ต่อไปนี้



จากรูป จะพบว่า กราฟของ f จะซ้ำกันเป็นคาบ ๆ เช่น กราฟของ f ใน $[0,2]$ เหมือนกับกราฟของ f ใน $[2,4]$ เหมือนกับกราฟของ f ใน $[4,6]$ เรื่อย ๆ ไป

เนื่องจากความยาวของช่วงที่มีกราฟเหมือนกัน เท่ากับ 2 ดังนั้น เราอาจเขียนได้ว่า $f(x+2) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x และ $x+2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f (ดูรูปข้างล่าง)



เราเรียกฟังก์ชัน f ที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า เป็น ฟังก์ชันที่เป็นคาบ

บทนิยาม ฟังก์ชันที่เป็นคาบ หมายถึง ฟังก์ชัน f ซึ่งมีจำนวนจริงบวก p ซึ่งทำให้

$$f(x+p) = f(x) \quad \dots(1)$$

สำหรับทุกค่าของ x และ $x+p$ ที่อยู่ในโดเมนของ f

จำนวนจริงบวก p ที่น้อยที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับ (1) เรียกว่า คาบของฟังก์ชัน f

จากตัวอย่าง กราฟของ f จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และคาบของฟังก์ชันเท่ากับ 2

กิจกรรมที่ 10

เมื่อนักศึกษา ศึกษาเนื้อหาในเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 10

แบบฝึกหัดที่ 10

ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. ให้นักศึกษาพิจารณาฟังก์ชันในข้อต่อไปนี้ ว่าเป็นฟังก์ชันชนิดใด

(1) $y = 3$

.....

(2) $y = |2x| + 4$

.....

(3) $y = \begin{cases} 2, 2 \leq x < 4 \\ 4, 2 \leq x < 4 \\ 6, 4 \leq x < 6 \end{cases}$

.....

(4) $y = 3x^2 + 2x - 8, y = 10x^2$

.....

(5) $y = 2x^5 + 4x^{-3} + 8x$

.....

(6) $y = \frac{2x}{x+1}$

.....

2. ชายคนหนึ่งมีเชือกยาว 200 เมตร ต้องการนำเชือกเส้นนี้ไปล้อมรั้วสามด้านรอบที่ดิน ซึ่งมีด้าน ด้านหนึ่งอยู่ติดแม่น้ำที่เป็นแนวตรง โดยให้ดินที่เขาล้อมรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของที่ดินที่เขาล้อมรั้วกับความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามกับแม่น้ำและด้านที่อยู่ตรงข้ามแม่น้ำความยาวเท่าใด เขาจึงจะได้พื้นที่ที่ดินมากที่สุด และได้พื้นที่มากที่สุดเท่าใด
-
-
-
-
-
-

3. ในการเกิดปฏิกิริยาเคมีครั้งหนึ่ง หาอุณหภูมิได้จากสมการ $\theta = 50 + 20t - t^2$ เมื่อ θ เป็นอุณหภูมิซึ่งมีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส และ t เป็นเวลา หน่วยเป็นวินาที เมื่อใดอุณหภูมิสูงขึ้นสูงสุดและสูงสุดเป็นเท่าใด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. บริษัทผลิตเสื้อแห่งหนึ่ง ถ้าขายเสื้อตัวละ 40 บาท จะขายได้ 4,000 ตัว ถ้าขายตัวละ 30 บาท จะขายได้ 8,000 ตัว จงสร้างฟังก์ชัน f เมื่อ $f(x)$ เป็นจำนวนเสื้อที่จะขายได้ และ x เป็นราคาเสื้อ (บาท)ต่อตัว โดยที่ f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. เมื่อโยนก้อนหินขึ้นไปในอากาศ ในเวลา t ใดๆ ซึ่งมีหน่วยเป็นวินาที ระยะความสูงของก้อนหินจากพื้นดิน ซึ่งมีหน่วยเป็นเมตร เป็นไปตามสมการ $h(t) = 20t - 5t^2, 0 \leq t \leq 4$
- (1) เมื่อใดที่ก้อนหินจะอยู่สูงจากพื้น 15 เมตร
 - (2) วินาทีที่ 2 ก้อนหินอยู่สูงจากพื้นดินเท่าใด

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง จงกาเครื่องหมาย X ทับอักษร ก ข ค หรือ ง หน้าคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียว แล้วตรวจคำตอบท้ายบท

1. ถ้าให้ $(x, 2) = (1, y)$ แล้ว คู่อันดับ (x, y) จะเท่ากับข้อใด

ก. $(1, 2)$

ข. $(2, 1)$

ค. $(1, 1)$

ง. $(2, 2)$

2. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $(x+y, 0) = (x-y, 0)$ แล้ว ค่า x และ y จะเท่ากับข้อใด

ก. $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

ข. $\{(\{1\}, 3), (\{1\}, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

ค. $\{(3, \{1\}), (4, \{1\}), (3, 2), (4, 2)\}$

ง. $\{(4, 1), (4, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

3. กำหนด $A = \{\{1\}, 2\}$ และ $B = \{3, 4\}$ ข้อใดคือ $A \times B$

ก. $\{(0, 2), (0, 3), (0, 4)\}$

ข. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

ค. $\{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

ง. $\{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1)\}$

4. กำหนดให้ $A = \{0, 1\}$ และ $B = \{2, 3, 4\}$ จงหา $A \times B$

ก. $\{(0, 2), (0, 3), (0, 4)\}$

ข. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

ค. $\{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

ง. $\{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1)\}$

5. ข้อใดคือ อินเวอร์สของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x - 2\}$

ก. $r^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid x = 3y - 2\}$

ข. $r^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x + 2\}$

ค. $r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid y = 3x + 2\}$

ง. $r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid x = 3y - 2\}$

6. เรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 5 + \frac{1}{x}\}$ คือข้อใด

ก. $\{y \in R \mid y \neq 0\}$

ข. $\{y \in R \mid y \neq -5\}$

ค. $\{y \in R \mid y = 0\}$

ง. $\{y \in R \mid y \neq 5\}$

7. โดเมนของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{7}{x-7}\}$ คือข้อใด

ก. $\{x \in R \mid x \neq 7\}$

ข. $\{x \in R \mid x \neq -7\}$

ค. $\{x \in R \mid x = 7\}$

ง. R

8. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 3\}$ ดังนั้น r^{-1} เท่ากับข้อใด

ก. $\{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x-3}{2}\}$

ข. $\{(y, x) \in R \times R \mid y = \frac{x-3}{2}\}$

ค. $\{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x - 3\}$

ง. $\{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x+3}{2}\}$

9. ให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x \geq -3 \text{ และ } y \geq x + 2\}$ จงหาโดเมนของ r^{-1}

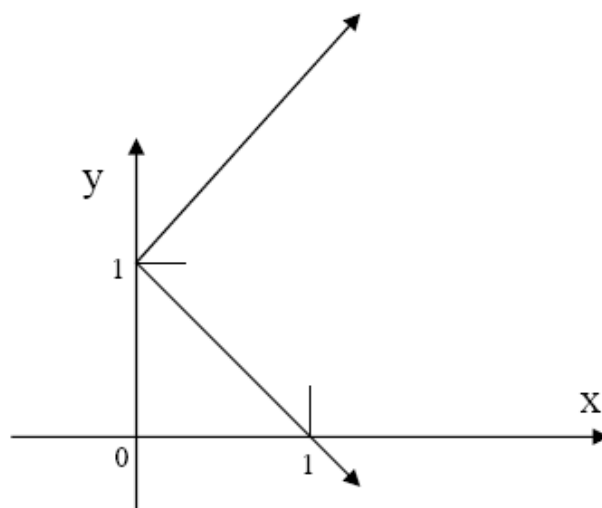
ก. $[-3, \infty)$

ข. $[-1, \infty)$

ค. $(\infty, -3]$

ง. $(\infty, -1]$

10.



กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของเซตใด

ก. $\{(x, y) \mid y = |x - 1|\}$

ข. $\{(x, y) \mid y = |x + 1|\}$

ค. $\{(x, y) \mid x = |y + 1|\}$

ง. $\{(x, y) \mid x = |y - 1|\}$

11. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้^๙เป็นฟังก์ชัน

ก. $\{(x, y) \in A \times A \mid y > x\}, A = \{1, 2, 3\}$

ข. $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 y = 1\}$

ค. $\{(x, y) \in R \times R \mid |y| = x - 2\}$

ง. $\{(x, y) \in R \times R \mid y = |x| - 2\}, B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

12. ความสัมพันธ์ใดต่อไปนี้^๙เป็นฟังก์ชัน

ก. $r_1 = \{(3, m), (4, m), (4, n), (5, p)\}$

ข. $r_2 = \{(3, m), (3, n), (4, p), (5, p)\}$

ค. $r_3 = \{(3, m), (4, n), (5, n), (5, p)\}$

ง. $r_4 = \{(3, m), (4, n), (5, p)\}$

13. กำหนดให้ $A = \{a, b\}$ ข้อความใดต่อไปนี้^๙ถูก

ก. จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจาก A ไป A เท่ากับ 4

ข. จำนวนฟังก์ชันทั้งหมดจาก A ไป A เท่ากับ 4

ค. จำนวนฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป A เท่ากับ 1

ง. อินเวอร์สของแต่ละฟังก์ชันจาก A ไป A ไม่เป็นฟังก์ชัน

14. ฟังก์ชันที่กำหนดให้ในข้อใดที่เป็นฟังก์ชัน 1-1

ก. $f(x) = 2x - 1$ ข. $f(x) = x^2 + 1$

ค. $f(x) = x^2 - x$ ง. $f(x) = |x| + 2$

15. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 3x + 5$ จงหาค่าของ $f(3)$

ก. -5

ข. 5

ค. -7

ง. 0

16. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ จงหาค่าของ $f(0)$

ก. 2

ข. 3

ค. 5

ง. 0

17. ถ้า $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}$ และ $f : B \rightarrow A$ แล้วข้อใดถูกต้อง

ก. โดเมนของ f คือ $\{1,2,3\}$

ข. เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของ B

ค. ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 ด้วย

ง. f^{-1} ต้องเป็นฟังก์ชันเสมอ

18. กำหนดให้ $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}$ ข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A

ก. $\{(1,4),(2,5),(3,4)\}$

ข. $\{(1,4),(2,6),(3,5)\}$

ค. $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

ง. $\{(4,1),(5,2),(6,3)\}$

19. ฟังก์ชันกำลังสอง เมื่อนำมาเขียนกราฟแล้ว จะได้กราฟชนิดใด

ก. กราฟเส้นตรง

ข. รูปกราฟขั้นบันได

ค. รูปพาราโบลา

ง. ฟังก์ชันที่เป็นคาบ

20. $y = |2x| + 1$ เป็นฟังก์ชันชนิดใด

ก. ฟังก์ชันเชิงเส้น

ข. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

ค. ฟังก์ชันขั้นบันได

ง. ฟังก์ชันตรรกยะ

เฉลยแบบทดสอบตนเองก่อนเรียน

- | | | | |
|------|-------|-------|-------|
| 1. ข | 6. ค | 11. ก | 16. ข |
| 2. ค | 7. ค | 12. ค | 17. ง |
| 3. ง | 8. ค | 13. ง | 18. ข |
| 4. ข | 9. ข | 14. ง | 19. ข |
| 5. ก | 10. ก | 15. ก | 20. ก |

แบบฝึกหัดที่ 1

1. กำหนด $A = \{2, 3\}$

$$B = \{6, 7, 8\}$$

(1) สร้างคู่อันดับ 6 คู่ ซึ่งมีสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังเป็นสมาชิกของ A และ B ตามลำดับ
ได้แก่ $(2,6), (2,7), (2,8), (3,6), (3,7), (3,8)$

(2) คู่อันดับ 6 คู่ ซึ่งมีสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังเป็นสมาชิกของ B และ A ตามลำดับ
ได้แก่ $(6,2), (6,3), (7,2), (7,3), (8,2), (8,3)$

2. จาก $(x,1) = (2,y)$

จะได้ว่า $x = 2$ และ $y = 1$

$\therefore$ คู่อันดับ $(x,y) = (2,1)$

3. จาก $(x,2) = (3,y)$

$$x = 3 \text{ และ } y = 2$$

$$x+y = 3+2 = 5$$

4. $(x+y,2) = (6,x-y)$

$$x+y = 6$$

$$x-y = 2$$

$$x = 4$$

$$y = 2$$

5. $(a-1,b+2) = (6,3)$

$$a-1 = 6$$

$$a = 7$$

$$b+2 = 3$$

$$b = 1$$

$$(a,b) = (7,1)$$

6. 1) $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$
 $A \times B = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,c), (b,d)\}$
 $B \times A = \{(b,a), (b,b), (c,a), (c,b), (d,a), (d,b)\}$
- 2) จาก $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$
 $A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}$
 $B \times A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$
7. $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ และ $C = \{3, 4\}$ จงหา
- 1) $A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$
 $A \times C = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$
 $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (1,4), (2,4)\}$
- 2) $B \cup C = \{2, 3, 4\}$
 $A \times (B \cup C) = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$
- 3) $A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$
 $A \times C = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$
 $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1,3), (2,3)\}$
- 4) $A \cap C = \emptyset$
 $B \times (A \cap C) = \emptyset$
- 5) $A - B = \{1\}$
 $(A - B) \times C = \{(1,3), (1,4)\}$
- 6) $A \times C = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$
 $B \times C = \{(2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$
 $(A \times C) - (B \times C) = \{(1,3), (1,4)\}$
8. ถ้า A มีสมาชิก 5 ตัว, B มีสมาชิก 6 ตัว
จำนวนสมาชิกของ $A \times B = 5 \times 6 = 30$ คู่อันดับ
จำนวนสมาชิกของ $B \times A = 6 \times 5 = 30$ คู่อันดับ
จำนวนสมาชิกของ $A \times A = 5 \times 5 = 25$ คู่อันดับ
จำนวนสมาชิกของ $B \times B = 6 \times 6 = 36$ คู่อันดับ

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จาก $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

$$r = \{(4,3), (5,3)\}$$

2. $r = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x\} = \{(2,4), (3,6), (4,8)\}$

3. $r = \{(8,7), (7,8)\}$

4. (1) $r = \{(3,4), (3,5), (4,5)\}$

(2) $r = \{(x,y) \in A \times B \mid y > x\}$

(3) เป็นสมมาตรของ r

5. จาก $A = \{x \mid x \in \Gamma^+ \text{ และ } x \leq 6\}$

$$r_1 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$r_2 = \{(4,4), (5,4), (6,4)\}$$

$$r_3 = \{(2,1), (4,2), (6,3)\}$$

แบบฝึกหัดที่ 3

1. $r = \{(2,3), (3,5), (5,7), (7,9), (3,9)\}$

$$D_r = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$R_r = \{3, 5, 7, 9\}$$

2. จาก $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$$

$$r = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10)\}$$

$$D_r = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$R_r = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

3. จาก $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x+y = 7\}$

$$r = \{(2,5), (3,4), (5,2), (4,3)\}$$

$$D_r = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$R_r = \{2, 3, 4, 5\}$$

4. $r = \{(x,y) \mid y = 2x+3\}$

จาก $y = 2x+3$ ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ตาม สามารถหาค่า y ได้เสมอ

นั่นคือ $D_r = \mathbb{R}$

และจาก $y = 2x+3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2}$ จะเห็นว่า y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ตาม ก็สามารถหาค่า x ได้เสมอ

นั่นคือ $R_r = \mathbb{R}$

5. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x+3}{x-1}\}$

$$y = \frac{x+3}{x-1}$$

หาค่า y ได้ เมื่อ $x-1 \neq 0$ นั่นคือ $x \neq 1$

$$D_r = \{x \mid x \neq 1\}$$

จาก $y = \frac{x+3}{x-1}$

$$y(x-1) = x+3$$

$$xy - y = x + 3$$

$$xy - x = y + 3$$

$$x(y-1) = y+3$$

$$x = \frac{y+3}{y-1}$$

หาค่า x ได้ เมื่อ $y-1 \neq 0$ นั่นคือ $y \neq 1$

$$R_r = \{y \mid y \neq 1\}$$

6. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| + 3\}$

จาก $y = |x| + 3$ ทุกจำนวนจริง x หา y ได้เสมอ

$$D_r = \mathbb{R}$$

และ $|x| \geq 0$ เสมอ ทุกจำนวนจริง x

$$\therefore |x| + 3 \geq 3$$

$$y \geq 3$$

$$R_r = \{y \mid y \geq 3\} = [3, \infty)$$

7. กำหนด $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{36-x^2}\}$

จาก $y = \sqrt{36-x^2}$ จะหาค่า y ได้ เมื่อ $36-x^2 \geq 0$

$$\text{หรือ } x^2 - 36 \leq 0$$

$$(x+6)(x-6) \leq 0$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$D_r = \{x \mid -6 \leq x \leq 6\} = [-6, 6]$$

จาก $-6 \leq x \leq 6$

$$0 \leq x^2 \leq 36$$

$$-36 \leq -x^2 \leq 0$$

$$0 \leq 36-x^2 \leq 36$$

$$0 \leq \sqrt{36-x^2} \leq 6$$

$$0 \leq y \leq 6$$

$$\therefore R_r = \{y \mid 0 \leq y \leq 6\} = [0, 6]$$

8. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x-5}\}$

$r \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ฉะนั้น $x-5 \neq 0$ จึงจะหาค่า $\frac{1}{x-5}$ ได้

$$x \neq 5, D_r = \mathbb{R} - \{5\} = \{x \mid x \neq 5\}$$

จาก $y = \frac{1}{x-5} \Rightarrow x = \frac{1+5y}{y}$ จะหาค่า x ได้ เมื่อ $y \neq 0$

$$R_r = \{y \mid y \neq 0\}$$

9. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x-5}\}$

เพราะว่า $r \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

จะหาค่า $\sqrt{x-5}$ ได้ เมื่อ $x-5 \geq 0$ หรือ $x \geq 5$

$$D_r = \{x \mid x \geq 5\} = [5, \infty)$$

และเมื่อ $x-5 \geq 0$ แล้ว ค่าของ $\sqrt{x-5} \geq 0$ ด้วย

$$R_r = \{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$$

10. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{3}\}$

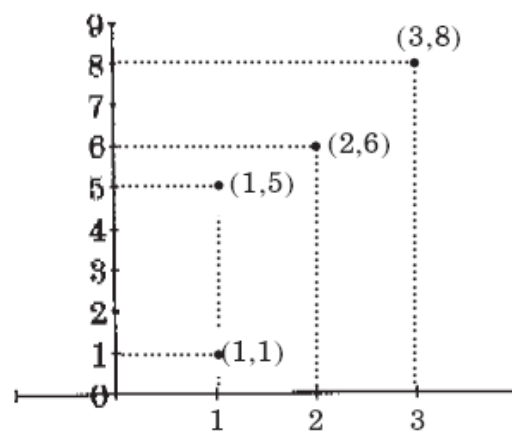
จาก $y = \sqrt{3}$ แสดงว่าทุกจำนวนจริง x ค่า $y = \sqrt{3}$ เสมอ

$\therefore D_r = \mathbb{R}$

และ $R_r = \{\sqrt{3}\}$

แบบฝึกหัดที่ 4

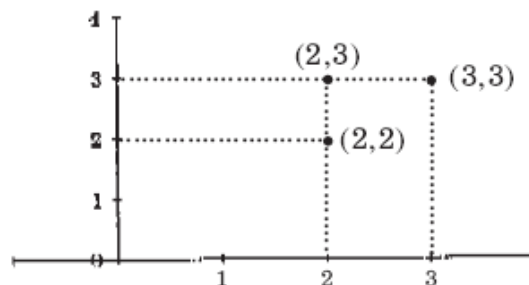
1. $r = \{(1,1), (1,5), (2,6), (3,8)\}$



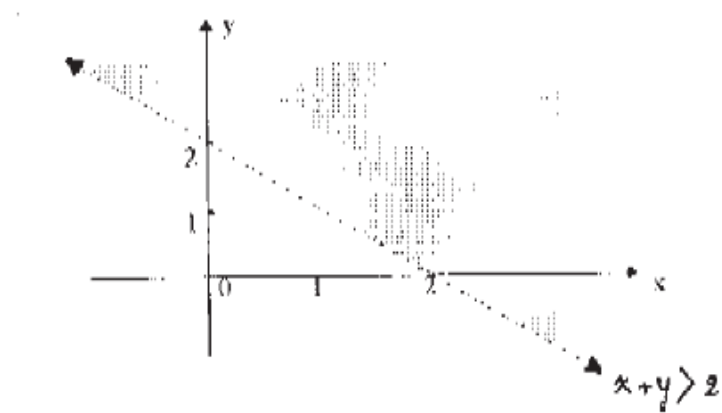
2. จาก $A = \{2, 3, 4\}$ และ $B = \{2, 3\}$

$t = \{(x,y) \in A \times B \mid y \geq x\}$

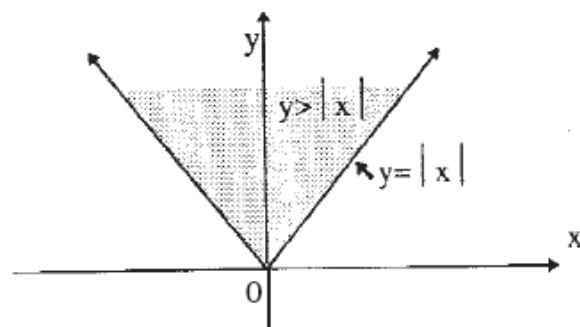
$t = \{(2,2), (2,3), (3,3)\}$



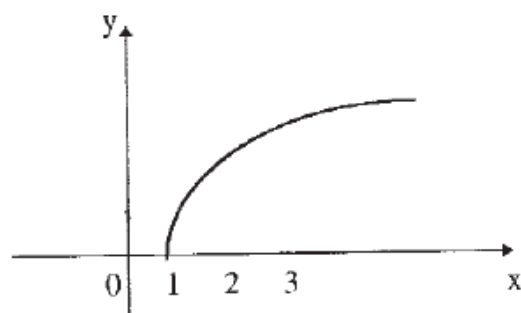
3. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x+y > 2\}$



4. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq |x|\}$



5. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x-1}\}$



1. หา D_r , R_r , และ r^{-1}

(1) ถ้า $r = \{(1,2), (2,4), (3,4), (3,5)\}$

$$D_r = \{1, 2, 3\} = R_{r^{-1}}$$

$$R_r = \{2, 4, 5\} = D_{r^{-1}}$$

$$r^{-1} = \{(2,1), (4,2), (4,3), (5,3)\}$$

(2) $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{3, 4, 5, 7\}$

$$r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x+1\}$$

$$\therefore r = \{(1,3), (2,5), (3,7)\}$$

$$D_r = \{1, 2, 3\} = R_{r^{-1}}$$

$$R_r = \{3, 5, 7\} = D_{r^{-1}}$$

$$r^{-1} = \{(3,1), (5,2), (7,3)\}$$

2. หา r^{-1} , $D_{r^{-1}}$, และ $R_{r^{-1}}$

(1) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x+3\}$

$$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-3}{2}\}$$

$$D_{r^{-1}} = \mathbb{R}, R_{r^{-1}} = \mathbb{R}$$

(2) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{x+1}\}$

$$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{1-x}; x \neq 1\}$$

$$D_{r^{-1}} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ และ } x \neq 1\}$$

$$R_{r^{-1}} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

(3) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9-x^2}\}$

เพราะว่า r คือ $y = \sqrt{9-x^2}$

$$\therefore y^2 = 9-x^2; -3 \leq x \leq 3 \text{ และ } 0 \leq y \leq 3$$

$$x^2 = 9-y^2$$

$$x = \pm \sqrt{9-y^2}; 0 \leq y \leq 3$$

$$\therefore r^{-1} \text{ คือ } y = \pm \sqrt{9-x^2}; 0 \leq x \leq 3$$

นั่นคือ $r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \pm \sqrt{9-x^2}; 0 \leq x \leq 3\}$

$$D_{r^{-1}} = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$$

$$R_{r^{-1}} = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$$

$$(4) \ r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x-5}\}$$

$$\text{จาก } y = \sqrt{x-5}$$

จะหา y ได้เมื่อ $x-5 \geq 0$

$$\text{นั่นคือ } x \geq 5$$

$$\therefore D_r = \{x \mid x \geq 5\} = [5, \infty) = R_{r^{-1}}$$

$$\text{และ } x-5 \geq 0$$

$$\sqrt{x-5} \geq 0$$

$$\therefore y \geq 0$$

$$\therefore R_r = \{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty) = D_{r^{-1}}$$

$$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2+5 ; x \geq 0 \text{ และ } y \geq 5\}$$

$$\text{หรือ } r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2+5 ; x \geq 0\}$$

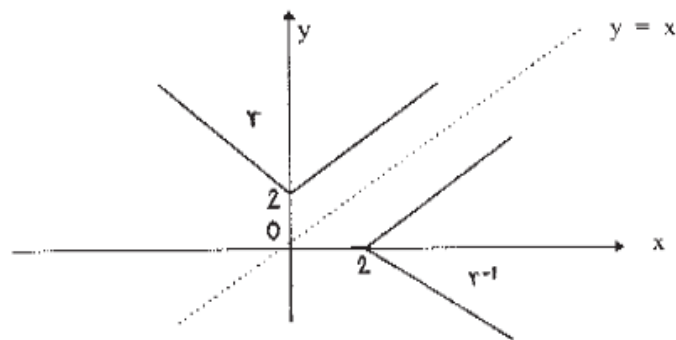
แบบฝึกหัดที่ 6

1. ก. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq |x|+2\}$

$$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq |y|+2\}$$

ข. กราฟของ r จะเป็นเซตของจุดที่อยู่เหนือหรือบนรูปตัว “วีหงาย” ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,2)$

กราฟของ r^{-1} จะเป็นเซตของจุดที่อยู่ทางขวามือหรือบนรูปตัว “วีเปิดขวา” ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(2,0)$



ค. $D_r = \mathbb{R}$ และ $R_r = [2, \infty)$

ดังนั้น $D_{r^{-1}} = R_r = [2, \infty)$

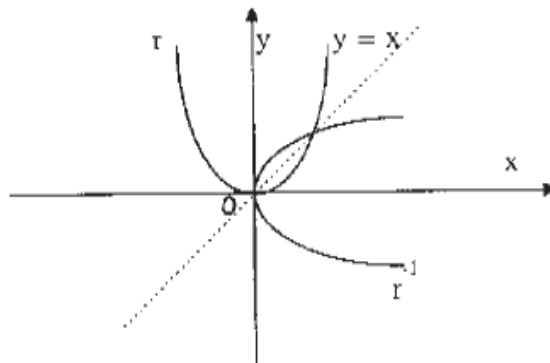
$$R_{r^{-1}} = D_r = \mathbb{R}$$

2. ก. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$

ข. กราฟของ r เป็นรูปพาราโบลาหงาย มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$

กราฟของ r^{-1} เป็นรูปพาราโบลาเปิดทางขวา มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$



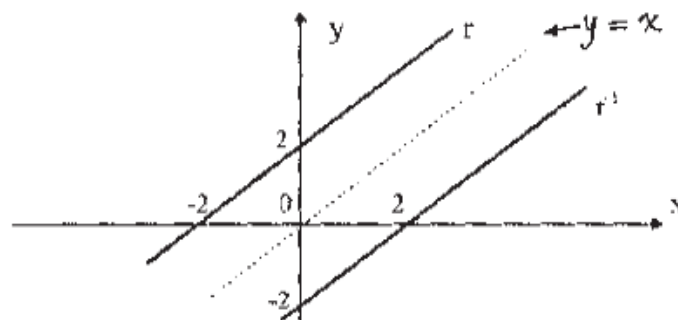
ก. $D_{r^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$

$R_{r^{-1}} = \{y \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

3. ก. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x+2\}$

$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y+2\}$

ข. กราฟของ r และ r^{-1} มีลักษณะดังรูป



ก. จาก $r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y+2\}$

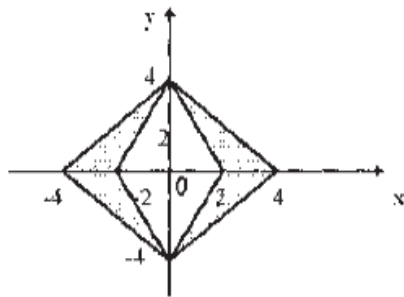
$D_r = \mathbb{R} = R_{r^{-1}}$

$R_r = \mathbb{R} = D_{r^{-1}}$

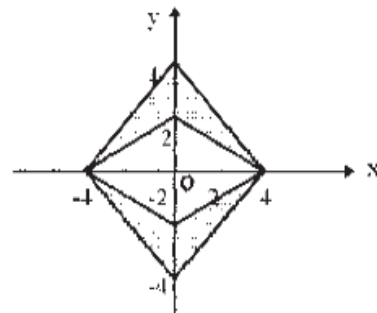
4. ก. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2|x| + |y| \geq 4 \text{ และ } |x| + |y| \leq 4\}$

$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2|y| + |x| \geq 4 \text{ และ } |y| + |x| \leq 4\}$

ข. กราฟของ r และ r^{-1} มีลักษณะดังรูปต่อไปนี้



กราฟของ r



กราฟของ r^{-1}

ก. $D_r = [-4,4]$; $R_r = [-4,4]$

$D_{r^{-1}} = [-4,4]$; $R_{r^{-1}} = [-4,4]$

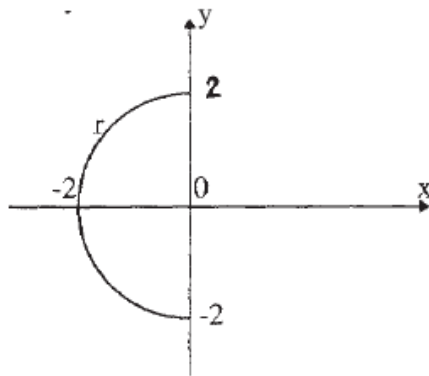
5. ก. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = -\sqrt{4-y^2}\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ และ } x \leq 0\}$

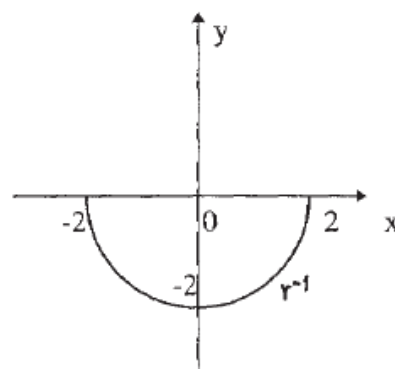
$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 + x^2 = 4 \text{ และ } y \leq 0\}$

ข. กราฟของ r เป็นรูปครึ่งวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ รัศมี 2 หน่วย เมื่อ $x \leq 0$

และกราฟของ r^{-1} เป็นรูปครึ่งวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ รัศมี 2 หน่วย เมื่อ $y \leq 0$



กราฟของ r



กราฟของ r^{-1}

ก. $D_r = [-2,0]$

$R_r = [-2,2]$

$D_{r^{-1}} = [-2,2]$

$R_{r^{-1}} = [-2,0]$

แบบฝึกหัดที่ 7

1. (1) เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันเลย
 (2) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน
 (3) เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน
 (4) เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน
 (5) เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน
2. (1) ไม่เป็นฟังก์ชัน
 (2) ไม่เป็นฟังก์ชัน
 (3) ไม่เป็นฟังก์ชัน
 (4) เป็นฟังก์ชัน
3. (1) $f = \{(1, -1), (2, 1), (3, 3), (4, 5)\}$
 (2) $f = \{(0, -1), (1, 0), (2, 3), (3, 8)\}$
 (3) $f = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

แบบฝึกหัดที่ 8

1. (1) $D_f = \{1, 2, 3, 5, 7\}$
 $R_f = \{2, 3, 4, 6, 8\}$
 (2) $D_f = \{6, 7, 8, 9, 10\}$
 $R_f = \{3\}$
 (3) $D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
 (4) $D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 6\}$
 (5) $D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$
2. $f(2) = 3$
 $f(x-1) = x^2 - 6$
3. $f(-3) = 6$
 $f(x+1) = x^2 + 5x + 10$

4. $f(0) = 1$
 $f(-2) = 5$
 $f(3)$ หาค่าไม่ได้

แบบฝึกหัดที่ 9

1. $f:A \rightarrow B$ มี 8 ฟังก์ชัน คือ

$$f_1 = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$$

$$f_2 = \{(1,5), (2,5), (3,5)\}$$

$$f_3 = \{(1,4), (2,4), (3,5)\}$$

$$f_4 = \{(1,4), (2,5), (3,4)\}$$

$$f_5 = \{(1,4), (2,5), (3,5)\}$$

$$f_6 = \{(1,5), (2,5), (3,4)\}$$

$$f_7 = \{(1,5), (2,4), (3,5)\}$$

$$f_8 = \{(1,5), (2,4), (3,4)\}$$

- $f:B \rightarrow A$ มี 9 ฟังก์ชัน คือ

$$f_1 = \{(4,1), (5,1)\}$$

$$f_2 = \{(4,2), (5,2)\}$$

$$f_3 = \{(4,3), (5,3)\}$$

$$f_4 = \{(4,1), (5,2)\}$$

$$f_5 = \{(4,1), (5,3)\}$$

$$f_6 = \{(4,2), (5,3)\}$$

$$f_7 = \{(4,2), (5,1)\}$$

$$f_8 = \{(4,3), (5,1)\}$$

$$f_9 = \{(4,3), (5,2)\}$$

2. $f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$ มี 6 ฟังก์ชัน คือ

$$f_1 = \{(a,m), (b,n), (c,p)\}$$

$$f_2 = \{(a,m), (b,p), (c,n)\}$$

$$f_3 = \{(a,n), (b,m), (c,p)\}$$

$$f_4 = \{(a,n), (b,p), (c,m)\}$$

$$f_5 = \{(a,p), (b,m), (c,n)\}$$

$$f_6 = \{(a,p), (b,n), (c,m)\}$$

3. $f_1:A \rightarrow B$

$$f_2:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$$

$$f_3:A \rightarrow B$$

$$f_4:B \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} A$$

$$f_5:B \rightarrow A$$

$$f_6:B \rightarrow A$$

$$f_7:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} A$$

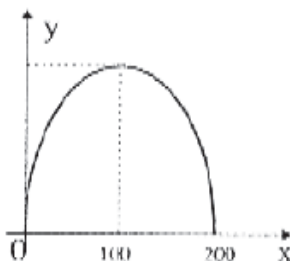
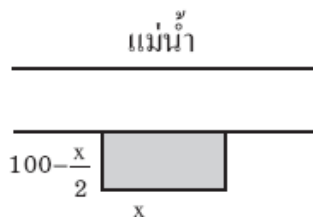
$$f_8:B \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$$

4. (1) $f(x) = 3x-2$ เป็นฟังก์ชัน 1-1
 (2) $g(x) = x^2-x$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1
5. (1) $f(x) = -2x+7$ เป็นฟังก์ชันลดใน $\mathbb{R}$
 (2) $f(x) = -x^2+3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $[-\infty, 0]$
 (3) $f(x) = x^2+1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $[0, \infty)$

แบบฝึกหัดที่ 10

1. (1) ฟังก์ชันเชิงเส้น (2) ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์
 (3) ฟังก์ชันขั้นบันได (4) ฟังก์ชันกำลังสอง
 (5) ฟังก์ชันพหุนาม (6) ฟังก์ชันตรรกยะ

2.



ให้ x = ความยาวของด้านที่ตรงข้ามกับแม่น้ำ

$$\text{ดังนั้น ความยาวของด้านข้าง} = \frac{200-x}{2}$$

$$= 100 - \frac{x}{2}$$

$$f(x) = \text{พื้นที่ของที่ดิน} = x(100 - \frac{x}{2})$$

$$f(x) = 100x - \frac{x^2}{2} \text{ เมื่อ } 0 < x < 200$$

กราฟของ f เป็นรูปพาราโบลาคว่ำว่า ในส่วนที่ $0 < x < 200$

$$\text{จุดยอดอยู่ที่จุดซึ่ง } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-\frac{1}{2})} = 100$$

เพราะฉะนั้น ถ้าต้องการพื้นที่ที่มากที่สุด จะต้องให้ด้านตรงข้ามแม่น้ำยาว 100 เมตร

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ที่มากที่สุด} &= 100(100) - \frac{(100)^2}{2} \\ &= 5,000 \text{ ตารางเมตร} \end{aligned}$$

3. เพราะว่า $\theta = 50 + 20t - t^2$

$$a = -1, b = 20, c = 50$$

$$\theta \text{ จะสูงสุดเมื่อ } t = \frac{-b}{2a}$$

$$= \frac{-20}{2(-1)} = 10 \text{ วินาที}$$

$$\text{และ } \theta \text{ สูงสุด} = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= 50 - \frac{(20)^2}{4(-1)}$$

$$= 50 + 100 = 150 \text{ องศาเซลเซียส}$$

เมื่อเวลา 10 วินาที อุณหภูมิจะสูงสุด 150 องศาเซลเซียส

4. ให้ $f(x) = ax + b$ (1)

$$\text{ถ้า } x = 40 ; f(x) = 4,000 \text{ แทนค่าใน (1) ; } 4,000 = 40a + b \text{ (2)}$$

$$\text{ถ้า } x = 30 ; f(x) = 8,000 \text{ แทนค่าใน (1) ; } 8,000 = 30a + b \text{ (3)}$$

$$(2) - (3) ; -4,000 = 10a$$

$$\therefore a = -400$$

$$\text{นำค่า } a \text{ แทนใน (2) ; } 4,000 = 40(-400) + b$$

$$4,000 = -16,000 + b$$

$$b = 20,000$$

$$\therefore f(x) = -400x + 20,000$$

5. (1) เพราะว่า $h(t) = 20t - 5t^2$

$$\text{เมื่อ } h(t) = 15 \text{ เมตร จะได้ว่า } 15 = 20t - 5t^2$$

$$5t^2 - 20t + 15 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$t = 1, 3$$

นั่นคือ ก้อนหินจะอยู่สูงจากพื้นดิน 15 เมตร เมื่อ $t = 1$ วินาที และ 3 วินาที

(2) เพราะว่า $h(t) = 20t - 5t^2$

$$\therefore h(2) = 20(2) - 5(2)^2$$

$$= 40 - 20 = 20 \text{ เมตร}$$

$\therefore$ วินาทีที่ 2 ก้อนหินอยู่สูงจากพื้นดิน 20 เมตร

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

- | | | | |
|------|-------|-------|-------|
| 1. ก | 6. ง | 11. ค | 16. ก |
| 2. ค | 7. ก | 12. ง | 17. ค |
| 3. ข | 8. ก | 13. ข | 18. ง |
| 4. ค | 9. ข | 14. ก | 19. ค |
| 5. ก | 10. ง | 15. ข | 20. ข |

บรรณานุกรม

ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ. หลักสูตรการศึกษานอกระบบ
ระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 สำหรับคนไทยในต่างประเทศ ระดับมัธยมศึกษา
ตอนปลาย. กรุงเทพฯ : รัชนีการพิมพ์, 2553.

ศูนย์ส่งเสริมการศึกษานอกระบบโรงเรียนกลุ่มเป้าหมายพิเศษ. หลักสูตรสถานศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษา
ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 หมวดวิชาคณิตศาสตร์. เอกสารอัดสำเนา. ม.ป.ป.

สำนักบริหารงานการศึกษานอกระบบโรงเรียน. ชุดการเรียนรู้ทางไกล ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย หมวดวิชา
คณิตศาสตร์ รหัส คณ 30 (MA 30). กรุงเทพฯ : เอกพิมพ์ไท จำกัด, 2547.

_____. สมุดบันทึกกิจกรรมการเรียนรู้ ประกอบชุดการเรียนรู้ทางไกล ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
หมวดวิชาคณิตศาสตร์ รหัส คณ 30 (MA 30). กรุงเทพฯ : เอกพิมพ์ไท จำกัด, 2547

สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย. หลักสูตรการศึกษานอกระบบ
ระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 สารความรู้พื้นฐาน. กรุงเทพฯ : รัชนีการพิมพ์,
2553.

คณะผู้จัดทำ

ที่ปรึกษา

นายอภิชาติ จีระวุฒิ

นายชัยศ อิมสุวรรณ์

นายวัชรินทร์ จำปี

นางมาริสา โกเศยะโยธิน

เลขาธิการ กศน.

รองเลขาธิการ กศน.

รองเลขาธิการ กศน.

ผู้อำนวยการศูนย์การศึกษานอกกระบบ

และการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ

ผู้เรียบเรียง

นางวรรณวรรณ บรรลือฤทธิ์

คณะบรรณาธิการ

นางมาริสา โกเศยะโยธิน

นางวันทนา จันทร์เพ็ญ

นางกรแก้ว พรหมจระประวัติ

นางวรรณวรรณ บรรลือฤทธิ์

นายสุทธิศักดิ์ แสนชื่น