หนังสือเรียนสาระความรู้พื้นฐาน (คณิตศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

รายวิชา ช่วงและการแก้สมการ อสมการ ในรูปค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง

32002

หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551
สำหรับคนไทยในต่างประเทศ

ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ
สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ
กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารทางวิชาการลำดับที่ 13/2553

ชื่อหนังสือ : หนังสือเรียนสาระความรู้พื้นฐาน (คณิตศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รายวิชา ช่วงและการแก้สมการ อสมการในรูปค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง (พค 32002)
หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 สำหรับคนไทยในต่างประเทศ

ปีที่พิมพ์ : พฤศจิกายน 2553

เอกสารลำดับที่ : 13/2553

จัดพิมพ์และเผยแพร่ : ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ
สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย
สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ
กระทรวงศึกษาธิการ
โทร. 0 2281 7217–8 , 0 2628 5329 , 0 2628 5331
โทรสาร 0 2628 5330

เว็ปไซต์ : http://www.nfe.go.th/0104-v3/frontend/

หนังสือเรียนสาระความรู้พื้นฐาน(คณิตศาสตร์)ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

รายวิชา ช่วงและการแก้สมการ อสมการในรูปค่าสมบูรณ์ของจำนวนจริง (พค 32002)

หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

สำหรับคนไทยในต่างประเทศ

ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ

สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย

สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ

กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารทางวิชาการลำดับที่ 13/2553

คำนำ

ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ ได้ดำเนินการจัดทำหนังสือเรียนสาระความรู้พื้นฐาน (คณิตศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รายวิชาช่วงและการแก้สมการอสมการในรูปค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง (พค 32002) สำหรับใช้ในการเรียนการสอนตามหลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 สำหรับคนไทยในต่างประเทศ มีวัตถุประสงค์ในการพัฒนาผู้เรียนให้มีคุณธรรม จริยธรรม มีสติปัญญาและศักยภาพในการประกอบอาชีพ การศึกษาต่อ และสามารถดำรงชีวิตอยู่ในครอบครัว ชุมชน สังคมได้อย่างมีความสุข โดยผู้เรียนสามารถนำหนังสือเรียนไปใช้ ด้วยวิธีการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง ปฏิบัติกิจกรรมรวมทั้งแบบฝึกหัด เพื่อทดสอบความรู้ความเข้าใจในสาระเนื้อหา โดยเมื่อศึกษาแล้วยังไม่เข้าใจ สามารถกลับไปศึกษาใหม่ได้ ผู้เรียนอาจจะสามารถเพิ่มพูนความรู้หลังจากศึกษาหนังสือเรียนนี้ โดยนำความรู้ไปแลกเปลี่ยนกับเพื่อนในชั้นเรียน ภูมิปัญญาในท้องถิ่น จากแหล่งเรียนรู้และจากสื่ออื่นๆ

ในการดำเนินการจัดทำหนังสือเรียนรายวิชานี้ ได้รับความอนุเคราะห์เป็นอย่างมากจากสถาบันการศึกษาทางไกล ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษขอขอบคุณ ไว้ ณ โอกาสนี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเรียนชุดนี้จะเป็นประโยชน์ในการจัดการเรียนการสอนตามสมควร หากมีข้อเสนอแนะประการใด ขอน้อมรับไว้ด้วยความขอบคุณยิ่ง

ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ

พฤศจิกายน 2553

สารบัญ

โครงสร้างเนื้อหา
สาระความรู้พื้นฐาน (คณิตศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
รายวิชา ช่วงและการแก้สมการ อสมการในรูปค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง (พค 32002)

มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐานที่ 2.2 มีความรู้ความเข้าใจ และทักษะพื้นฐานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. รู้และเข้าใจสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวก การคูณ การหาร การเท่ากัน การไม่เท่ากัน และนำไปใช้ได้
2. แก้สมการตัวแปรเดียวกำลังหนึ่งได้
3. แก้สมการตัวแปรเดียวกำลังสองได้
4. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับช่วงและการแก้อสมการ
5. เขียนช่วงจากสมการ และอสมการได้
6. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง และหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงได้
7. แก้สมการและอสมการในรูปค่าสมบูรณ์ของจำนวนจริงได้

ขอบข่ายเนื้อหา

ตอนที่ 1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนจริง

เรื่องที่ 1 โครงสร้างของจำนวนจริง

เรื่องที่ 2 สมบัติของจำนวนจริง

ตอนที่ 2 การแก้สมการตัวเดียวที่มีดีกรีไม่เกินสอง

เรื่องที่ 1 การแก้สมการตัวแปรเดียวกำลังหนึ่ง

เรื่องที่ 2 การแก้สมการตัวแปรเดียวกำลังสอง

ตอนที่ 3 ช่วงและการแก้อสมการ

เรื่องที่ 1 ช่วง

เรื่องที่ 2 การแก้อสมการ

เรื่องที่ 3 การแก้อสมการตัวแปรเดียวกำลังมากกว่าหนึ่ง

ตอนที่ 4 ค่าสัมบูรณ์ และการแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

เวลาที่ใช้ในการศึกษา 40 ชั่วโมง

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ศึกษารายละเอียดของโครงสร้างรายวิชา ช่วงและการแก้สมการ อสมการในรูปค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง (พค32002) เพื่อให้เข้าใจในหัวข้อ มาตรฐานการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง และขอบข่ายเนื้อหา

2. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน จำนวน 18 ข้อ

3. ศึกษารายละเอียดเนื้อหาทีละตอนอย่างละเอียด และทำกิจกรรมตามที่กำหนด แล้วตรวจสอบกับแนวตอบกิจกรรม (แบบฝึกหัด) ถ้าผู้เรียนตอบผิดควรกลับไปศึกษาและทำความเข้าใจในเนื้อหานั้นใหม่ให้เข้าใจก่อนที่จะศึกษาในเรื่องต่อไป

4. ศึกษาเนื้อหาและทำกิจกรรมให้ครบทุกตอน

5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน จำนวน 18 ข้อ

สื่อการเรียนรู้

1. หนังสือเรียน

2. ชุดการเรียนทางไกล หมวดวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของสถาบันการศึกษาทางไกล สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย

การประเมินผล

1. จากการทำแบบทดสอบตนเองก่อนเรียนและหลังเรียน

2. จากการทำกิจกรรมท้ายบทในแต่ละเรื่อง

แบบทดสอบก่อนเรียน

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ข้อใดเป็นจำนวนอตรรกยะทุกจำนวน
   1. $\frac{22}{7}, \sqrt[3]{-27}, \sqrt{5}$
   2. $2.919119111, \sqrt{7}, \pi$
   3. $2.46666..., \sqrt{4}+\sqrt{9}, \sqrt{11}$
   4. $2.513513531..., \pi\sqrt{29}$

2. ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง
   1. ผลบวกของอตรรกยะและตรรกยะ เป็นอตรรกยะ
   2. ผลคูณของอตรรกยะและตรรกยะ เป็นอตรรกยะ
   3. ไม่มีจำนวนตรรกยะที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 5
   4. จำนวนที่สามารถเขียนในรูป $\frac{a}{b}$ เมื่อ $a, b \in I$ และ $b \neq 0$ เรียกว่า จำนวนตรรกยะ

3. กำหนด R เป็นจำนวนจริง, Q เป็นตรรกยะ, Q' เป็นอตรรกยะ, I เป็นจำนวนเต็ม, I^+ เป็นจำนวนเต็มบวก, I^- เป็นจำนวนเต็มลบ ข้อใด ถูกต้อง
   1. $I^+ \cup I^- = I$
   2. $R-Q = I$
   3. $R = Q \cup Q'$
   4. $R \subset Q \subset I$

4. ข้อใดมีสมบัติปิดของการคูณ
   1. $A = \{x|x \in I^-\}$
   2. $B = \{x|x \in N\}$
   3. $C = \{0, 1, 2\}$
   4. $D = \{-3, -2, -1\}$

5. อินเวอร์สการบวกของ $\frac{1}{p}-q$ คือข้อใด
   1. $\frac{1}{p}+q$
   2. $\frac{pq-1}{p}$
   3. $\frac{p}{1+pq}$
   4. $\frac{1-pq}{p}$

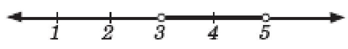
6. อินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{2}+1$ คือข้อใด
   1. $-\sqrt{2}+1$
   2. 0
   3. 1
   4. $\sqrt{2}-1$

7. กำหนดให้ $A = (-\infty, 3]$, $B = [-2, 5)$ $A' \cap B$ ตรงกับเส้นจำนวนในข้อใด

1. 

2. 

3. 

4. 

8. ให้ m เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x+3$ หาร x^3+mx^2+4x+3 ลงตัว แล้ว m มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

9. เซตคำตอบของสมการ $2x^3-5x^2-x+6 = 0$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{-1, 0, 2, 3\}$
2. $\{-1, 2, 3, 4\}$
3. $\left\{-2, -1, \frac{3}{2}, 2\right\}$
4. $\left\{-1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$

10. ผลบวกของคำตอบทุกคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับอสมการ $x(x-2) < 15$ เท่ากับข้อใด

1. 4
2. 7
3. 12
4. 15

11. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\frac{x-5}{x-8} \le 0$ เซตคำตอบของอสมการ คือ $[5, 8]$

ข. $\frac{(x-4)\ (x+5)}{x-2} \ge 0$ เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-\infty, 4) \cup (-5, 2]$

ค. $(x-2)\ (x+3)\ (x-7) > 0$ เซตคำตอบของอสมการ คือ $[-3, 2) \cup (7, \infty)$

ข้อใดเป็นจริง

1. ข้อ ก และ ข ถูกต้อง
2. ข้อ ก และ ค ถูกต้อง
3. ข้อ ข และ ค ถูกต้อง
4. ข้อ ก, ข และ ค ผิดทุกข้อ

12. ถ้า a เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่สอดคล้องกับอสมการ $(x^2+1)\ (x-2)\ (x-6) < 0$
b เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับอสมการ $(3-x)\ (x^2-9) < 0$
แล้ว a+b เท่ากับข้อใด

1. 3
2. 5
3. 7
4. 9

13. อสมการแต่ละคู่ในข้อใดต่อไปนี้มีเซตคำตอบเท่ากัน

1. $x^2 < x$ กับ $x-1 < 0$
2. $\frac{x+4}{5-x} > 0$ กับ $(x-5)(x+4) > 0$
3. $\frac{x^2-9}{x+3} \geq -6$ กับ $x-3 \geq -6$
4. $2x+\frac{4}{x-5} > \frac{4}{x-5}-7$ กับ $2x+7 > 0$

14. กำหนดให้ $xy \geq 0$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง ข้อใดถูกต้อง

1. $x+y \geq 0$
2. $|x|+y \geq 0$
3. $|x+y| < |x|+|y|$
4. $|x+y| = |x|+|y|$

15. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $a < 0$ และ $b > 0$ แล้ว $|a+b| = |a|+|b|$

ข. ถ้า $a < b < 0$ แล้ว $|a|+b > 0$ แต่ $|b|+a < 0$

ค. เซตคำตอบของ $|x| = x-1$ คือ ϕ

ข้อใดกล่าวถูกต้องเกี่ยวกับข้อความที่กำหนด

1. ข้อความถูกต้องเพียงข้อเดียว
2. ข้อความถูกต้อง 2 ข้อ
3. ข้อความถูกต้องทั้ง 3 ข้อ
4. ข้อความผิดทั้ง 3 ข้อ

16. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $|x-2| = 2-x$ แล้ว $x = 2$

ข. ผลบวกของค่า x ที่สอดคล้องกับสมการ $|2x+1| = |3x-2|$ คือ $-\frac{14}{5}$

ค. เซตคำตอบที่ทำให้สมการ $3|x|^2- 11|x|+6 = 0$ เป็นจริงคือ $\left\{\frac{2}{3}, 3\right\}$

ข้อใดเป็นจริง

1. ข้อความถูกต้องเพียงข้อเดียว
2. ข้อความถูกต้อง 2 ข้อ
3. ข้อความถูกต้องทั้ง 3 ข้อ
4. ข้อความผิดทั้ง 3 ข้อ

17. เซตคำตอบของอสมการ $2 < |x+4| < 3$ เท่ากับข้อใด

1. $(-7, -1) \cup (-\infty, -2) \cup (-\infty, -6)$
2. $(-7, -6) \cup (-2, -1)$
3. $(-7, -6) \cup (-\infty, -2)$
4. $(-7, -6) \cup (-\infty, -6)$

18. เซตคำตอบของอสมการ $|5x-6| > 2x+5$ เท่ากับข้อใด

1. $\left(-\infty, \frac{1}{7}\right)$

2. $\left(\frac{11}{3}, \infty\right)$

3. $\left(-\infty, \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{11}{3}, \infty\right)$

4. $x \in \left(-\infty, \frac{1}{7}\right) \cup \left[\frac{11}{3}, \infty\right)$

ตอนที่ 1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนจริง

เรื่องที่ 1 โครงสร้างของจำนวนจริง

ความคิดเรื่องจำนวนของมนุษย์มีมาตั้งแต่สมัยโบราณกาล เมื่อครั้งที่มนุษย์เริ่มมาอยู่รวมกลุ่มกัน มีการเลี้ยงสัตว์ การบันทึกจำนวนสัตว์ที่เลี้ยงไว้ โดยการแทนจำนวนเหล่านั้นด้วยก้อนหินหรือท่อนไม้ หรือการทำรอยบากเครื่องหมายไว้บนต้นไม้ แท่นหินในลักษณะของการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่ง เช่น สัตว์เลี้ยง 1 ตัว ใช้วิธีของการวางก้อนหิน 1 ก้อน เมื่อมีการเพิ่มจำนวนสัตว์เลี้ยงก็เพิ่มจำนวนก้อนหิน และในทำนองเดียวกัน เมื่อจำนวนสัตว์เลี้ยงลดลงก็ลดจำนวนก้อนหินออกไป เป็นต้น การเริ่มต้นในลักษณะดังกล่าว เรียกว่า จำนวนนับ การเพิ่มขึ้นของจำนวนนับก็ยังคงเป็นจำนวนนับเสมอ ต่อจากนั้นก็เป็นการหักออก หรือลดลงของจำนวนนับ การแบ่งจำนวนนับ ทำให้เกิดความคิดในเรื่องของการบวก การลบ การคูณ และการหาร ซึ่งก่อให้เกิดจำนวนบวก จำนวนลบ จำนวนศูนย์ จากนั้นมีการคิด การพัฒนา ประยุกต์มาอย่างต่อเนื่อง ทำให้เกิดจำนวนหลายประเภทดังต่อไปนี้

1. จำนวนนับหรือจำนวนธรรมชาติ (Natural Numbers) เป็นจำนวนแรกที่มนุษย์รู้จักและใช้ให้เกิดประโยชน์ต่าง ๆ ในการนับสิ่งของประกอบด้วยเลข 1, 2, 3, ...

เมื่อให้ N แทนเซตของจำนวนนับ

$$\therefore \quad N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

2. จำนวนเต็ม (Integers) เป็นจำนวนที่ประกอบด้วยจำนวน 3 ลักษณะ คือ

2.1 จำนวนเต็มบวก (Positive Integers) เขียนแทนด้วย I^+ เป็นเซตที่ประกอบด้วยตัวเลข 1, 2, 3, ...

$$\therefore \quad I^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

2.2 จำนวนเต็มศูนย์ (Zero Integers) เขียนแทนด้วย I^0 เป็นเซตที่ประกอบด้วยเลขศูนย์ (0) เพียงตัวเดียว

$$\therefore \quad I^0 = \{0\}$$

2.3 จำนวนเต็มลบ (Negative Integers) เขียนแทนด้วย I^- เป็นเซตที่ประกอบด้วยตัวเลข -1, -2, -3, ...

$$\therefore \quad I^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$$

3. จำนวนตรรกยะ (Rational Numbers) เป็นจำนวนที่เขียนได้ 3 ลักษณะ คือ

3.1 เศษส่วน เช่น $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ หรือ $\frac{7}{8}$ เป็นต้น

3.2 ทศนิยมไม่รู้จบซ้ำ เช่น 0.2000... = 0.2 หรือ 1.6666... = $1.\dot{6}$ เป็นต้น

3.3 จำนวนเต็ม ซึ่งคือจำนวนที่มีส่วนเป็น 1 เช่น $\frac{2}{1}, \frac{5}{1}$ หรือ $\frac{-12}{1}$ เป็นต้น

เมื่อให้ Q แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

$$\therefore \quad Q \quad = \quad \left\{ x \middle| x = \frac{a}{b}, a, b \in I \text{ และ } b \neq 0 \right\}$$

4. จำนวนอตรรกยะ (Irrational Numbers) เป็นจำนวนที่เขียนได้ 2 ลักษณะ คือ

4.1 จำนวนที่เขียนในรูปของกรณฑ์หรือราก เช่น $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}$ หรือ $\sqrt[4]{12}$ เป็นต้น

4.2 ทศนิยมไม่รู้จบไม่ซ้ำ เช่น $\sqrt{2}$ = 1.4142135... หรือ $\sqrt[3]{3}$ = 1.44224... หรือ π = 3.1415926535897... เป็นต้น

เมื่อให้ Q' แทนเซตจำนวนอตรรกยะ

โดยจะถือว่าจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะทุกจำนวนสามารถจัดรวมเข้าด้วยกันได้ โดยให้ยูเนียนของเซตของจำนวนตรรกยะกับเซตของจำนวนอตรรกยะเป็นเซตของจำนวนจริง นั่นคือ อินเตอร์เซกชันของทั้งสองเซตนี้เป็นเซตว่าง

5. จำนวนจริง (Real Numbers) เป็นจำนวนที่เกิดจากการรวมกันของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

เมื่อให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$$\therefore \quad R \quad = \quad Q \cup Q'$$

6. จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers) เป็นจำนวนที่แบ่งได้เป็น 2 ส่วน คือ

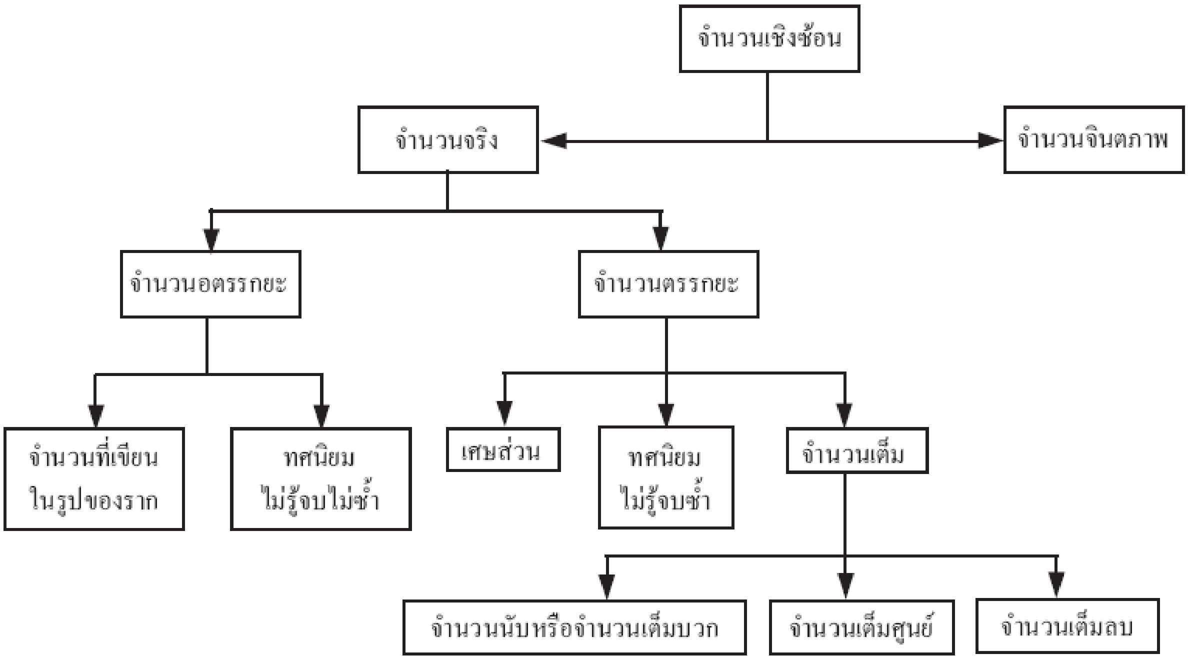
6.1 ส่วนจริง (Real parts) คือ ส่วนที่เป็นจำนวนจริง

6.2 ส่วนจินตภาพ (Imaginary parts) คือ ส่วนที่เป็น $\sqrt{-1}$ หรือรากอันดับคู่ แล้วข้างในรากเป็นจำนวนลบ

เมื่อให้ Z แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน

$$\therefore \quad Z \quad = \quad \left\{ x \middle| x = a+bi, a \text{ และ } b \in R \text{ และ } i = \sqrt{-1} \right\}$$

จากระบบจำนวนที่กล่าวมาข้างต้นพอจะสรุปเป็นแผนผังแสดงโครงสร้างของระบบจำนวนได้ดังนี้



แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่าง ๆ

เรื่องที่ 2 สมบัติของจำนวนจริง

การกล่าวถึงสมบัติของจำนวนจริง คือการที่นำจำนวนจริงใด ๆ มากระทำต่อกันในลักษณะต่าง ๆ เช่น การบวก การลบ การคูณ การหาร หรือกระทำด้วยลักษณะพิเศษที่กำหนดขึ้น แล้วมีผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในลักษณะหรือทำนองเดียวกัน จึงนำมาสรุปเป็นสมบัติเพื่อสะดวกในการจดจำและนำไปประยุกต์ใช้

1. สมบัติการเท่ากันในระบบจำนวนจริง

เมื่อกำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1.1 สมบัติการสะท้อน (Reflexive Property)

$a = a$, $b = b$ หรือ $c = c$

1.2 สมบัติการสมมาตร (Symmetric Property)

ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$

1.3 สมบัติการถ่ายทอด (Transitive Property)

ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

1.4 สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า $a = b$ แล้ว $a+c = b+c$

1.5 สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก

ถ้า $a+b = c+b$ แล้ว $a = c$

1.6 สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

1.7 สมบัติการตัดออกสำหรับคูณ

ถ้า $a \cdot b = c \cdot b$ แล้ว $a = c$ เมื่อ $b \neq 0$

2. สมบัติการบวกและการคูณในระบบจำนวนจริง

เมื่อกำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

บทนิยาม ในระบบจำนวนจริง เรียกจำนวนจริงที่บวกกับจำนวนจริงจำนวนใดก็ตามได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงจำนวนนั้นว่า เอกลักษณ์การบวก

ตัวอย่างเช่น Z เป็นเอกลักษณ์การบวก จะได้

$z+a = a = a+z$

ซึ่งในกรณีนี้ศูนย์เป็นจำนวนจริงจำนวนเดียวเท่านั้นที่บวกกับจำนวนจริงใด ๆ ผลลัพธ์จะเป็นจำนวนจริงจำนวนนั้น ดังนั้น ***ศูนย์เป็นเอกลักษณ์การบวกของระบบจำนวนจริง***

บทนิยาม ในระบบจำนวนจริง อินเวอร์สการบวกของจำนวนจริง a (ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ -a) หมายถึง จำนวนจริงที่บวกกับ a แล้วได้ศูนย์

ตัวอย่างเช่น $a+(-a) = 0 = (-a)+a$

ถ้าจำนวนสองจำนวนบวกกันได้ศูนย์ เรียกว่าจำนวนทั้งสองเป็นอินเวอร์สการบวกซึ่งกันและกัน

บทนิยาม ในระบบจำนวนจริง เรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ ซึ่งคูณกับจำนวนจริงจำนวนใดก็ตาม ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงจำนวนนั้นว่า เอกลักษณ์การคูณ

ตัวอย่างเช่น ถ้า i เป็นเอกลักษณ์การคูณ i ต้องไม่เป็น 0 และ $ia = a = ai$ ซึ่ง***ในระบบจำนวนจริง มีเอกลักษณ์การคูณตัวเดียว คือ 1***

บทนิยาม ในระบบจำนวนจริง อินเวอร์สการคูณของจำนวนจริง $a \neq 0$ (ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ a^{-1}) หมายถึง จำนวนที่คูณกันกับ a แล้วได้ 1

ตัวอย่างเช่น $a^{-1}a = 1 = aa^{-1}$

2.1 สมบัติปิด (Closure Property)

การบวก ถ้า $a \in R$ และ $b \in R$ แล้ว $a+b \in R$

เช่น $1 \in R$ และ $2 \in R$ แล้ว $1+2 \in R$

การคูณ ถ้า $a \in R$ และ $b \in R$ แล้ว $a \cdot b \in R$

เช่น $1 \in R$ และ $2 \in R$ แล้ว $1 \times 2 \in R$

2.2 สมบัติการสลับที่ (Commutative Property)

การบวก $a+b = b+a$ เช่น $4+3 = 3+4 = 7$

การคูณ $a \cdot b = b \cdot a$ เช่น $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$

2.3 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative Property)

การบวก $a+(b+c) = (a+b)+c$

การคูณ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

2.4 สมบัติการมีเอกลักษณ์ (Identity Property)

การบวก $a+0 = 0+a = a$

การคูณ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

2.5 สมบัติการมีอินเวอร์ส (Inverse Property)

การบวก $a+(-a) = (-a)+a = 0$

การคูณ เมื่อ $\frac{1}{a} = a^{-1}$ จะได้ $a\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)a = 1 = a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a$

2.6 สมบัติการแจกแจง (Distributive Property)

$a\ (b+c) = ab+ac$

เช่น $2\ (3+7) = (2 \times 3)+(2 \times 7)$

$= 6+14$

$= 20$

หรือ $(a+b) \cdot c = a \cdot c+b \cdot c$

เช่น $(2+4) \cdot 3 = (2 \times 3)+(4 \times 3)$

$= 6+12$

$= 18$

จากสมบัติของจำนวนจริงสามารถใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้

ทฤษฎีบท 1 (กฎการตัดออกสำหรับการบวก)

เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า $a+b = a+c$ แล้ว $b = c$

หรือ $a+c = b+c$ แล้ว $a = b$

ทฤษฎีบท 2 (กฎการตัดออกสำหรับการคูณ)

เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า $a \cdot b = a \cdot c$ แล้ว $b = c$

หรือ $a \cdot c = b \cdot c$ แล้ว $a = b$

ทฤษฎีบท 3 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$a \cdot 0 = 0$ หรือ $0 \cdot a = 0$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$(-1)\,a = -a$

ทฤษฎีบท 5 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

ทฤษฎีบท 6 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$a(-b) = -ab$

$(-a)\,b = -ab$

$(-a)(-b) = ab$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a+c = b+c$ แล้ว $a = b$

พิสูจน์

จาก	$a+c = b+c$	
จะได้	$(a+c)+(-c) = (b+c)+(-c)$	(การบวกด้วยจำนวนเท่ากัน)
	$a+(c+(-c)) = b+(c+(-c))$	(การเปลี่ยนกลุ่ม)
	$a+0 = b+0$	(สมบัติของอินเวอร์สของการบวก)
	$a = b$	(สมบัติของเอกลักษณ์ของการบวก)

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ $0a = 0$

พิสูจน์

จาก	$(0+0)\,a = 0a$	(เอกลักษณ์ของการบวก)
	$0a+0a = 0a+0$	(การแจกแจงและเอกลักษณ์ของการบวก)
	$0a = 0$	(ทฤษฎีบท 1)

3. สมบัติการลบและการหารจำนวนจริง

เมื่อมีการให้ความหมายของการลบด้วยอินเวอร์สการบวก

บทนิยาม เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ $a-b = a+(-b)$

นั่นคือ a-b หมายถึง ผลบวกของ a กับอินเวอร์สการบวกของ b

ตัวอย่างเช่น $7-3 = 7+(-3) = 4$

หรือ $(-5)-(-2) = -5+2 = -3$

และ $-a-b = -a+(-b)$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ทฤษฎีบท 1 ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง

$$a(b-c) = ab-ac$$

$$(a-b)c = ac-bc$$

$$(-a)(b-c) = -ab+ac$$

เมื่อมีการให้ความหมายของการหารด้วยอินเวอร์สการคูณ

บทนิยาม เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a(b^{-1})$

นั่นคือ $\frac{a}{b}$ หมายถึง ผลคูณของ a กับอินเวอร์สการคูณของ b

เนื่องจาก $\frac{1}{b} = 1(b^{-1}) = b^{-1}$

จึงได้ว่า $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right) = a(b^{-1})$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $a \neq 0$ จะได้ $a^{-1} \neq 0$

ทฤษฎีบท 3

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$$ เมื่อ $b, c \neq 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$ เมื่อ $b, c \neq 0$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$ เมื่อ $b, d \neq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$ เมื่อ $b, d \neq 0$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{-1} = \frac{c}{b}$$ เมื่อ $b, c \neq 0$

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}$$ เมื่อ $b, c \neq 0$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{ad}{bc}$$ เมื่อ $b, c, d \neq 0$

ตัวอย่างการพิสูจน์เพื่อการนำสมบัติจำนวนจริงกับนิยามมาใช้

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า $a(b-c) = ab-ac$

พิสูจน์

$a(b-c)$	$=$	$a(b+(-c))$	(บทนิยามการลบ)
	$=$	$ab+a(-c)$	(การแจกแจง)
	$=$	$ab+(-ac)$	(ทฤษฎีบท 6 การบวกและการคูณ)
	$=$	$ab-ac$	(บทนิยามการลบ)

ตัวอย่างที่ 4 จงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ เมื่อ $b, c \neq 0$

พิสูจน์

$\frac{a}{b}$	$=$	$a(b^{-1})$	(บทนิยามการหาร)
	$=$	$a(b^{-1})(1)$	(เอกลักษณ์การคูณ)
	$=$	$\left(a(b^{-1})\right)(c^{-1}c)$	(อินเวอร์สการคูณ)
	$=$	$(ac)(c^{-1}b^{-1})$	(การสลับที่และการเปลี่ยนกลุ่ม)
	$=$	$(ac)(bc)^{-1}$	($c^{-1}b^{-1}$ เป็นอินเวอร์สการคูณของ bc)
	$=$	$\frac{ac}{bc}$	(บทนิยามการหาร)

หมายเหตุ จากบทนิยามการหารในระบบจำนวนจริง การหารจะทำได้ต่อเมื่อตัวหารไม่เป็นศูนย์ เนื่องจากศูนย์ไม่มีอินเวอร์สการคูณ

$\frac{1}{0}, \frac{0}{0}, \frac{4}{0}$ จึงไม่มีความหมายในระบบจำนวนจริง

นั่นคือ $\frac{a}{b} = c$ ต่อเมื่อ $a = bc$ เป็นจริงในกรณี $b \neq 0$ เท่านั้น

เหตุผลที่ไม่ให้นิยามการหารด้วยสมการการคูณ

เพราะ ถ้า $\frac{0}{0} = 1$ ซึ่ง $0 = 0 \times 1$

และ $0 = 0 \times 2$ จะได้ $\frac{0}{0} = 2$

ดังนั้น $\frac{0}{0} = 1$ และ $\frac{0}{0} = 2$ นั่นคือ $1 = 2$ ซึ่งไม่จริง

จึงทำให้ใช้นิยาม $\frac{0}{0} = 1$ ไม่ได้

4. สมบัติการไม่เท่ากันของจำนวนจริง

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงสองจำนวน

ค่าของ a และ b ต้องมีคุณสมบัติเป็นอย่างใดอย่างหนึ่งใน 3 อย่าง ดังนี้ คือ

4.1 $a = b$

4.2 $a > b$

4.3 $a < b$

ถ้า $a > b$ แล้ว a ลบด้วย b จะให้ค่าเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ

ถ้า $a < b$ แล้ว a ลบด้วย b จะให้ค่าเป็นจำนวนจริงลบเสมอ

นั่นคือ $a > b \longleftrightarrow a-b > 0$

$a < b \longleftrightarrow a-b < 0$

$a < b$	หมายความว่า	a น้อยกว่า b
$a > b$	หมายความว่า	a มากกว่า b
$a \leq b$	หมายความว่า	a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b
$a \geq b$	หมายความว่า	a มากกว่าหรือเท่ากับ b
$a < c < b$	หมายความว่า	c มีค่ามากกว่า a แต่น้อยกว่า b
$a \leq c \leq b$	หมายความว่า	c มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b

คุณสมบัติการไม่เท่ากันเปรียบเทียบกับคุณสมบัติการเท่ากันได้ดังนี้

1. คุณสมบัติสะท้อน $a > a$ เป็นไปไม่ได้
2. คุณสมบัติสมมาตร ถ้า $a > b$ แล้ว $b > a$ เป็นไปไม่ได้
3. คุณสมบัติถ่ายทอด $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$ เป็นจริง
4. คุณสมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

   ถ้า $a > b$ แล้ว $a+c > b+c$ เป็นจริง
5. คุณสมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

   กรณีที่ 1 ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว

   $ac > bc$ เป็นจริง

   ตัวอย่างเช่น $5 > 3$ และ $2 > 0$

   ดังนั้น $5 \times 2 > 3 \times 2$ จะได้ $10 > 6$

กรณีที่ 2 ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว

$ac < bc$

ตัวอย่างเช่น $5 > 3$ และ $-2 < 0$

ดังนั้น $5x(-2) < 3x(-2)$ จะได้ $-10 < -6$

6. คุณสมบัติการตัดออกสำหรับการบวก

ถ้า $a+c > b+c$ แล้ว $a > b$

7. คุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ

กรณีที่ 1 ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$

เช่น $5x2 > 3x2$ และ $2 > 0$ แล้ว $5 > 3$

กรณีที่ 2 ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$

เช่น $3x(-2) > 5x(-2)$ และ $-2 < 0$ แล้ว $3 < 5$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

พิสูจน์ ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ จะได้

$c < 0$ แสดงว่า c เป็นจำนวนลบ $\therefore$ $-c$ เป็นจำนวนบวก

ดังนั้น $(a-b)\ (-c) \in R^{+}$ (การคูณด้วยจำนวนบวก)

$a\ (-c)-b\ (-c) \in R^{+}$ (การแจกแจงการคูณ)

$-ac+bc \in R^{+}$ (การคูณจำนวนจริง)

$bc-ac \in R^{+}$ (การสลับที่การบวก)

$\therefore$ $bc > ac$ หรือ $ac < bc$ (นิยาม)

กิจกรรมที่ 1

เมื่อนักศึกษา ได้ศึกษาเนื้อหาในเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 1

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงพิจารณาข้อความในแต่ละข้อ ถ้าเป็นจริงให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ถ้าเป็นเท็จให้เขียนเครื่องหมาย ✗

............(1) 1 เป็นจำนวนเต็ม

............(2) $\sqrt[3]{-27}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

............(3) $\sqrt{(-2)^2}$ เป็นจำนวนเต็มลบ

............(4) 0.04026เป็นจำนวนตรรกยะ

............(5) 0 เป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มลบก็ได้

............(6) มีจำนวนเต็มบางจำนวนเป็นจำนวนอตรรกยะ

............(7) -0.12154 เป็นจำนวนอตรรกยะ

............(8) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ เป็นจำนวนนับ

............(9) $\sqrt{x^2} = x$ เมื่อ $x \geq 0$

.........(10) เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $\sqrt{x^2} = x$

.........(11) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ เป็นจำนวนตรรกยะเพราะเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้

.........(12) มีจำนวนเต็มบวกมากที่สุด

.........(13) มีจำนวนเต็มบวกน้อยที่สุด

.........(14) มีจำนวนตรรกยะที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 3^-

.........(15) มีจำนวนอตรรกยะที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 0

.........(16) จำนวนทศนิยมสามารถเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้เสมอ

.........(17) ถ้า $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว x เป็นจำนวนตรรกยะเสมอ

.........(18) ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนอตรรกยะเสมอ

.........(19) มีจำนวนจริง x ซึ่ง $\sqrt{x+2} = -3$

.........(20) ค่า x น้อยที่สุด แต่มากกว่า 6 คือ 7 เมื่อ x เป็นจำนวนนับ

2. ข้อต่อไปนี้ข้อใดจริงให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ข้อใดเท็จให้เขียนเครื่องหมาย ✗ ลงหน้าข้อ

...........(1) จำนวนตรรกยะมีสมบัติปิดของการบวกและการลบ

...........(2) จำนวนตรรกยะมีสมบัติปิดของการหาร

...........(3) จำนวนตรรกยะมีสมบัติปิดของการหารด้วยตัวหารที่ไม่เท่ากับศูนย์

...........(4) การคูณและการหารมีสมบัติปิดในระบบจำนวนเต็ม

...........(5) การบวกและการลบมีสมบัติปิดในระบบจำนวนนับ

...........(6) เซตของจำนวนอตรรกยะมีสมบัติปิดภายใต้การบวก

...........(7) เซตของจำนวนอตรรกยะมีสมบัติปิดภายใต้การคูณ

...........(8) เซตของจำนวนคู่มีสมบัติปิดสำหรับการหาร

...........(9) เซตของจำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว มีสมบัติปิดสำหรับการบวกและการหาร

.........(10) $\{-1, 0, 1\}$ มีสมบัติปิดสำหรับการคูณ

.........(11) ถ้า $a, b \in R$ และ $a*b = a+b+15$ แล้ว R มีสมบัติปิดสำหรับการกระทำ *

.........(12) กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ถ้า $x, y \in A$ และนิยามว่า $x*y$ = เศษที่เป็นจำนวนบวกที่ได้จากการหาร xy ด้วย 7 แล้ว A มีสมบัติปิดสำหรับการกระทำ *

.........(13) กำหนด $S = \{n \in N | \sqrt{n} \in N\}$ จะได้ว่า S มีสมบัติปิดภายใต้การคูณ

.........(14) ระบบจำนวนเต็มมีสมบัติการจัดหมู่ภายใต้การลบ

.........(15) ระบบจำนวนเต็มมีสมบัติการสลับที่ภายใต้การคูณ

.........(16) ระบบจำนวนตรรกยะมีสมบัติการจัดหมู่ภายใต้การคูณ

.........(17) กำหนดให้ $x, y \in I$ และ $x*y = (2x-y)^2$ ค่าของ x ที่ทำให้ $4*3 = 5*x$ คือ 5 และ 15

.........(18) กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และนิยามว่า $A \Delta B o C * D = A^D+2(B+C)-C^2$ ดังนั้น $6 \Delta +4 o 5 * 2 = 54$

.........(19) กำหนดให้ $x, y \in R$ และ $x*y = x-y+xy$ จะได้ว่า $x*y = y*x$

.........(20) กำหนดให้ $x, y, z \in R$ ถ้า $x*y = 3xy-(x+y)$ แล้ว $x*y = y*x$

.........(21) กำหนดให้ $x, y, z \in R$ ถ้า $x*y = 3xy+(x+y)$ แล้ว $x*(y*z) = (z*y)*x$

.........(22) กำหนดให้ $a, b \in R$ ถ้า $a*b = a+4b$ แล้ว $(a*b)*c = a*(b*c)$

.........(23) เซต $I-\{0\}$ ไม่มีเอกลักษณ์การบวก

.........(24) เซต $I-\{0\}$ ไม่มีเอกลักษณ์การคูณ

..........(25) ถ้า $a+b = 0$ แล้ว b คือ อินเวอร์สการบวก

..........(26) ถ้า $a \cdot b = 1$ แล้ว b คือ อินเวอร์สการคูณของ a

..........(27) ถ้า q เป็นอินเวอร์สการบวกของ p และ $2p-q = 3$ แล้ว $p = 1$

..........(28) อินเวอร์สการคูณของ $-\frac{5a^2}{b}$ คือ $-\frac{b}{5a^2}$ เมื่อ a, b $\neq 0$

..........(29) อินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ คือ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

..........(30) อินเวอร์สการบวกของ $\frac{1}{a}-b$ คือ $\frac{a}{1ะab}$

..........(31) อินเวอร์สการคูณของ $\frac{3}{a^2-a-3}$ จะหาค่าไม่ได้ เมื่อ $a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

..........(32) กำหนดให้ A = {a, b, c} มี b เป็นเอกลักษณ์การคูณ จะได้ว่า ab = a

..........(33) ถ้า mn = 1 แล้ว แสดงว่า n เป็นอินเวอร์สการคูณของ $\frac{1}{m}$

..........(34) ถ้า x เป็นอินเวอร์สการคูณของ y แล้ว ค่าของ $x\left(\frac{y}{x}-y^2\right)$ มีค่า 0

..........(35) กำหนดให้ $a*b = a+b-4$ เมื่อ $a, b \in R$ แล้ว เอกลักษณ์ของ $*$ คือ 4

..........(36) กำหนดให้ $a*b = a+b-4$ เมื่อ $a, b \in R$ แล้ว อินเวอร์สของ 8 คือ 1

..........(37) กำหนดให้ $a, b \in I$ และ $*$ เป็นการกระทำที่กำหนดว่า $a*b = a+b+2$ แล้ว อินเวอร์ส ของ 4 ภายใต้การกระทำนี้ คือ -8

.........(38) ให้ s เป็นเซตของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ $a, b \in s$ และกำหนดให้ $a\Delta b = a^b$ แล้ว เอกลักษณ์ของ Δ คือ 1

.........(39) กำหนดให้ A = {2, 4, 6, 8} และ $*$ เป็นการกระทำที่กำหนดว่า สำหรับ a, b ทุกตัว ใน A $a*b$ = หลักหน่วยของ ab แล้วเอกลักษณ์ คือ b

.........(40) กำหนดให้ $x, y, z \in R$ และ $x*y = x-y+xy$ จะมีจำนวนจริง a ที่ทำให้ $a*x = x$

ตอนที่ 2 การแก้สมการตัวแปรเดียวที่มีดีกรีไม่เกินสอง

เรื่องที่ 1 การแก้สมการตัวแปรเดียวกำลังหนึ่ง

การแก้สมการตัวแปรเดียวกำลังหนึ่ง

หลักในการแก้สมการ

1) แยกค่าคงที่และตัวแปรให้อยู่คนละข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

2) ใช้คุณสมบัติของระบบจำนวน

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการหาค่าของตัวแปรดังต่อไปนี้

1. $2x-6 = 8$
2. $7x-2 = 6-5x$

วิธีทำ 1. $2x-6 = 8$

$$2x-\cancel{6}+\cancel{6} = 8+6$$
$$2x = 14$$
$$x = \frac{14}{2}$$
$$x = 7$$

2. $7x-2 = 6-5x$

$$7x-\cancel{2}+\cancel{2} = 6+2-5x$$
$$7x+5x = 8-\cancel{5x}+\cancel{5x}$$
$$12x = 8$$
$$x = \frac{8}{12}$$
$$x = \frac{2}{3}$$

เรื่องที่ 2 การแก้สมการตัวแปรเดียวกำลังสอง

หลักในการแก้สมการ

1) ทำให้ข้างใดข้างหนึ่งของสมการมีค่าเป็นศูนย์ (0) โดยให้ดึงตัวแปรที่มีกำลังสองมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าบวก

2) ใช้วิธีแยกตัวประกอบ หรือ

ใช้สูตร $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

เมื่อสมการอยู่ในรูป $ax^2+bx+c = 0$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการหาค่าของตัวแปรดังต่อไปนี้

1. $x^2-5x = -6$
2. $3x^2-x-1 = 1$

วิธีทำ 1.

$$x^2-5x = -6$$
$$x^2-5x+6 = 0$$
$$(x-2)(x-3) = 0$$
x = 3 หรือ 2

2.

$$3x^2-x-1 = 1$$
$$3x^2-x-2 = 0$$

จาก $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-4(3)(-2)}}{2(3)}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6}$$
$$x = \frac{1 \pm 5}{6}$$

$x = \dfrac{6}{6}$ หรือ $\dfrac{-4}{6}$

$x = 1$ หรือ $\dfrac{-2}{3}$

กิจกรรมที่ 2

เมื่อนักศึกษา ได้ศึกษาเนื้อหาในเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 2

แบบฝึกหัดที่ 2

ข้อต่อไปนี้ข้อใดจริงให้เขียนเครื่องหมาย ✓ ข้อใดเท็จให้เขียนเครื่องหมาย ✗ ลงหน้าข้อ

............(1) $a = b$ ก็ต่อเมื่อ $ab = ba$

............(2) $a = b$ ก็ต่อเมื่อ $ac = bc$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

............(3) $a = b$ ก็ต่อเมื่อ $a^2 = b^2$

............(4) $a = b$ ก็ต่อเมื่อ $(a-b)^n = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

............(5) ถ้า $a^n = b^n$ สำหรับเลขจำนวนเต็ม n ใด ๆ แล้ว $a = b$

............(6) $a \in R$ ถ้า $a \geq 0$ แล้ว $a^2 \geq 0$

............(7) ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^2 \geq a$

............(8) ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a-c > b-d$

............(9) ถ้า $x+y > 0$ แล้ว $x > 0$ แล้ว $y > 0$

..........(10) ถ้า $x+y > y+z$ และ $x > 0$ แล้ว $y > z$

..........(11) ถ้า $ac > bc$ แล้ว $a > b$

..........(12) ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $ac > bd$

..........(13) ถ้า $a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

..........(14) ถ้า $a > b$ และ $a, b \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

..........(15) ถ้า $a^2 < b^2$ แล้ว $|a| < |b|$

..........(16) $y > z$ ก็ต่อเมื่อ $x-y > x-z$ และ $x > 0$

..........(17) ถ้า $x > y > 0$ แล้ว $x^n > y^n > 0$ ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนเต็มใด ๆ

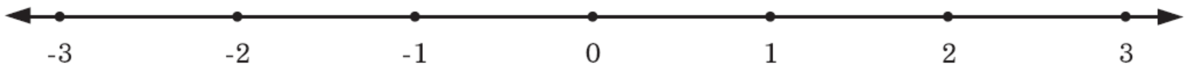
..........(18) ถ้า $a > 0, b > 0$ และ $a \neq b$ แล้ว $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} < 2$ เสมอ

..........(19) ถ้า $a > 0$ แล้ว $a+\frac{1}{a} > 2$

..........(20) ถ้า $a > 0, b > 0, a \neq b$ แล้ว $\frac{1}{2}(a^2+b^2) > ab$

ตอนที่ 3 ช่วงและการแก้อสมการ

จำนวนจริงทั้งหลายเราสามารถแทนได้ด้วยจุดบนเส้นตรง ซึ่งเส้นตรงที่แทนจำนวนจริงนี้เรียกว่า เส้นจำนวน (Real Line) โดยเริ่มจากจุด ๆ หนึ่งเรียกว่า จุดกำเนิด (Origin) ซึ่งแทนด้วยศูนย์ (0) และแบ่งมาตราส่วนของเส้นตรงนี้เป็นจำนวนเต็ม เพื่อง่ายต่อการสร้าง ให้ทางขวาของ 0 แทนจำนวนเต็มบวก และให้ทางซ้ายของ 0 แทนจำนวนเต็มลบ ซึ่งกำหนดระยะห่างออกไปเป็น 1 หน่วย 2 หน่วย 3 หน่วย... ตามลำดับ ดังรูป



ถ้ากำหนดจำนวนจริงจำนวนหนึ่งให้ จำนวนจริงนั้นสามารถแทนได้ด้วยจุดบนเส้นตรงนี้เพียงจุดเดียว

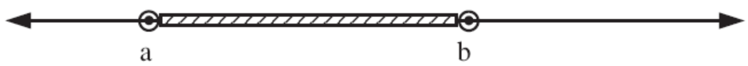
1. ช่วง (Interval)

ช่วง หมายถึง เซตของจำนวนจริงที่เป็นส่วนใดส่วนหนึ่งของเส้นจำนวน

เมื่อกำหนดให้ $a, b \in R$ จะได้ว่า

1.1 ช่วงเปิด (Open Interval) หมายถึง เซตของจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง a และ b แต่ไม่รวม a และ b แทนด้วย

$(a, b) \quad = \quad \{x | a < x < b\}$ ดังรูป



1.2 ช่วงปิด (Closed Interval) หมายถึง เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ a ถึง b แทนด้วย

$[a, b] \quad = \quad \{x | a \leq x \leq b\}$ ดังรูป

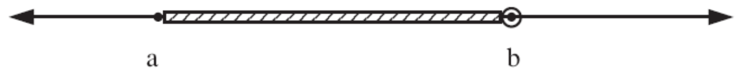
1.3 ช่วงครึ่งเปิดครึ่งปิด (Half-Open Interval)

1) ช่วงเปิดซ้ายปิดขวา หมายถึง เซตของจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง a และ b ที่ไม่รวม a แต่รวม b แทนด้วย

$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ ดังรูป

2) ช่วงปิดซ้ายเปิดขวา หมายถึง เซตของจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง a และ b ที่รวม a แต่ไม่รวม b แทนด้วย

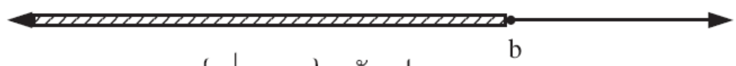
$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ ดังรูป



1.4 ช่วงอนันต์ (Infinite Interval) หมายถึง เซตของจำนวนจริงที่ไม่มีขอบเขตจำกัดที่ปลายข้างใดข้างหนึ่งของเส้นจำนวน หรือทั้ง 2 ข้างของเส้นจำนวน โดยจำนวนที่อยู่ปลายข้างซ้ายสุดแทนด้วย $-\propto$ และจำนวนที่อยู่ปลายข้างขวาสุด แทนด้วย $\propto$ ซึ่งช่วงอนันต์แบ่งได้เป็น 5 แบบ คือ

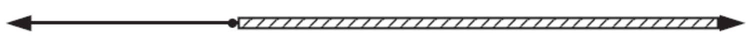
1) $(-\propto, b) = \{x \mid x < b\}$ ดังรูป

2) $(-\propto, b] = \{x \mid x \leq b\}$ ดังรูป



3) $(a, \propto) = \{x \mid x > a\}$ ดังรูป

4) $[a, \propto) = \{x \mid x \geq a\}$ ดังรูป



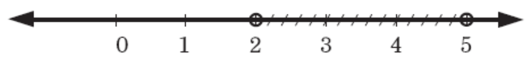
5) $(-\propto, \propto) = \{x \mid -\propto < x \propto\}$ ดังรูป

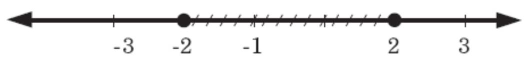
หมายเหตุ ช่วงที่มีค่าอนันต์ จะเป็นช่วงเปิดเสมอเพราะไม่มีขอบเขตที่จำกัดไว้

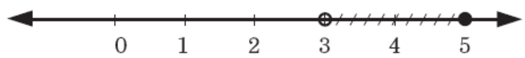
ตัวอย่าง จงเขียนแผนภาพและสัญลักษณ์แทนช่วงต่อไปนี้

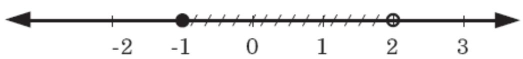
1. $A = \left\{ x \middle| 2 < x < 5 \right\}$
2. $B = \left\{ x \middle| -2 \leq x < 2 \right\}$
3. $C = \left\{ x \middle| 3 < x \leq 5 \right\}$
4. $D = \left\{ x \middle| -1 \leq x < 2 \right\}$
5. $E = \left\{ x \middle| x < -1 \right\}$
6. $F = \left\{ x \middle| x \leq 2 \right\}$
7. $G = \left\{ x \middle| x > 4 \right\}$
8. $H = \left\{ x \middle| x \geq -2 \right\}$

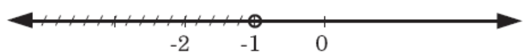
วิธีทำ

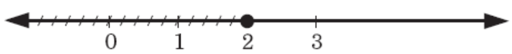
1. $A = (2, 5)$ ดังรูป 

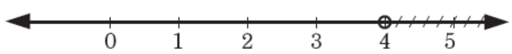
2. B $[-2, 2]$ ดังรูป 

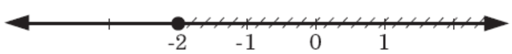
3. C, $(3, 5]$ ดังรูป 

4. D, $[-1, 2)$ ดังรูป 

5. E, $(-\propto, 1)$ ดังรูป 

6. $F = (-\propto, 2]$ ดังรูป 

7. $G = (4, \propto)$ ดังรูป 

8. $H = [-2, \propto)$ ดังรูป 

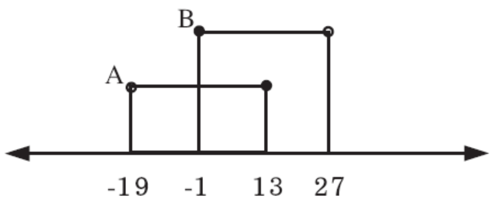
ตัวอย่างที่ 1 กำหนด A = (-19, 13]

B = [-1, 27)

C = (-7, 18)

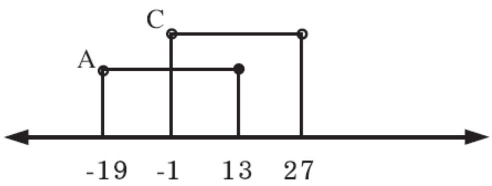
จากรูปจะได้ A ∪ B, A-C และ B ∪ C

วิธีทำ 1.



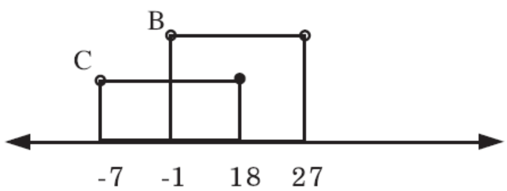
จากรูปจะได้ A ∪ B = (-19, 27]

2.



จากรูปจะได้ A-C = (-19, -7]

3.



จากรูปจะได้ B ∩ C = [-1, 18)

2. การแก้อสมการ

อสมการ (Inequality) คือ ประโยคที่มีตัวแปรและกล่าวถึงการไม่เท่ากัน โดยมีเครื่องหมาย >, ≥, < หรือ ≤ เช่น

$3x > 5$; $4x-6 < 3$; $2 < 5x < 8$

$-3 \leq 4x+2 < 5$; $-2 < 3x-2 \leq 12$

การแก้อสมการ คือ การหาเซตของจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของอสมการ โดยที่จำนวนจริงเหล่านี้เมื่อนำมาแทนค่าตัวแปรในอสมการแล้วทำให้อสมการเป็นจริง

วิธีการแก้อสมการจะนิยมใช้สมบัติการไม่เท่ากันของจำนวนจริง

1) การบวกจำนวนจริงเข้าทั้งสองข้างของอสมการ

2) การคูณทั้งสองข้างของอสมการด้วยจำนวนจริงบวก

การใช้สมบัติอื่นต้องระมัดระวังให้ดี เช่น การคูณทั้งสองข้างของอสมการด้วยจำนวนจริงลบ การกลับเศษเป็นส่วน การยกกำลังสองทั้งสองข้าง ต้องระวังการเปลี่ยนเครื่องหมายของการไม่เท่ากัน

ตัวอย่าง	$-4 < -2$	จริง และ $(-4)(2) < (-2)(2)$	จริง
	$-4 < -2$	จริง แต่ $(-4)(-3) < (-2)(-3)$	เท็จ
	$-4 < -2$	จริง แต่ $(-4)^2 < (-2)^2$	เท็จ
	$3 < 5$	จริง และ $3^2 < 5^2$	จริง
	$-4 < -2$	จริง แต่ $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{2}$	เท็จ

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้อสมการ $2x+4 < x-6$

วิธีทำ กำหนดให้ $2x+4 < x-6$

บวกด้วย -4 ทั้งสองข้างได้ $2x < x-10$

บวกด้วย -x ทั้งสองข้างได้ $x < -10$

นั่นคือ ค่าของ x ที่สอดคล้องกับอสมการที่กำหนดให้เป็นจำนวนจริงที่น้อยกว่า -10

เซตคำตอบของอสมการ คือ $\{x \mid x < -10\}$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้อสมการ $x^2-5x+6 > 0$

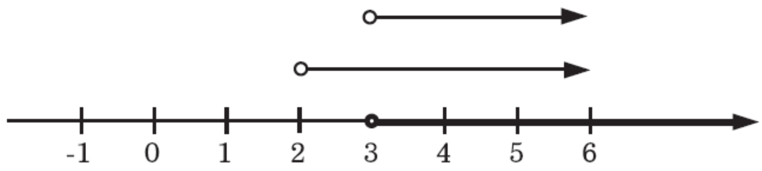
วิธีทำ เนื่องจาก $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

ดังนั้น $x^2-5x+6 > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x-2$ และ $x-3$ เป็นจำนวนบวกทั้งคู่ หรือเป็นจำนวนลบทั้งคู่

กรณีที่ 1 $x-2 > 0$ และ $x-3 > 0$

นั่นคือ $x > 2$ และ $x > 3$

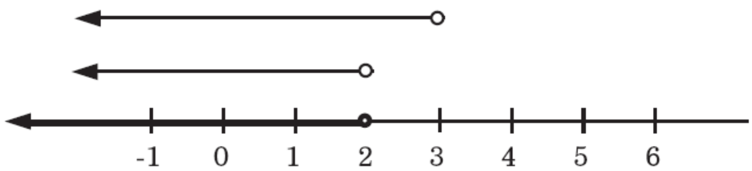
ค่า x ซึ่งมากกว่า 2 และมากกว่า 3 ในขณะเดียวกัน คือ $x > 3$ เขียนแสดงโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



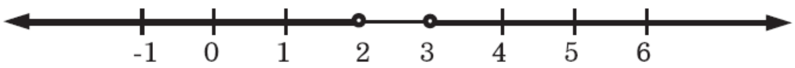
กรณีที่ 2 $\quad x-2 < 0$ และ $x-3 < 0$

นั่นคือ $\quad x < 2$ และ $x < 3$

ค่า x ซึ่งน้อยกว่า 2 และน้อยกว่า 3 ในขณะเดียวกัน คือ $x < 2$ เขียนแสดงโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้

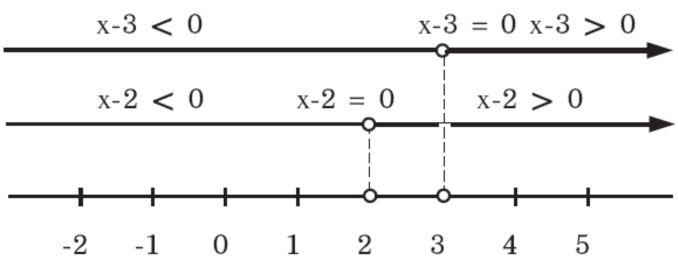


ดังนั้น ค่าของ x ซึ่งสอดคล้องอสมการที่กำหนดให้ คือ $x > 3$ หรือ $x < 2$ เขียนแสดงโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



เซตคำตอบของอสมการ คือ $\{x \mid x > 3$ หรือ $x < 2\}$

จากตัวอย่างที่ 2 นี้ การพิจารณาหาคำตอบของอสมการ $x^2-5x+6 > 0$ จะรวดเร็วขึ้นถ้ารวบรัดขั้นตอนในการทำ กล่าวคือ แทนที่จะพิจารณาแยกเป็นกรณี อาจเริ่มโดยเขียนรูปแสดงค่าของ x-2 และ x-3 ว่าเป็นจำนวนบวกเมื่อไร เป็นจำนวนลบเมื่อไร แล้วดูว่าในช่วงใดที่ผลคูณของสองจำนวนดังกล่าวมีค่าตามต้องการดังนี้



จากรูป จะเห็นว่าเส้นจำนวนจะถูกแบ่งเป็น 3 ช่วง คือ $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ และ $(3, \infty)$ จุดแบ่ง คือ จุดที่ทำให้ x-2 และ x-3 เป็นศูนย์

ในช่วง $(-\infty, 2)$; $(x-2)(x-3) > 0$ (จำนวนลบคูณจำนวนลบ)

ในช่วง $(2, 3)$; $(x-2)(x-3) < 0$ (จำนวนบวกคูณจำนวนลบ)

ในช่วง $(3, \infty)$; $(x-2)(x-3) > 0$ (จำนวนบวกคูณจำนวนบวก)

เซตคำตอบจึงเป็น $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้อสมการ $\frac{1}{x} < 0$

วิธีทำ ในกรณีนี้จะนำ x คูณตลอดไม่ได้ เนื่องจากไม่ทราบว่า $x < 0$ หรือ $x > 0$ ซึ่งจะส่งผลต่อการใช้เครื่องหมาย ดังนั้นเพื่อความปลอดภัย เราทราบว่า $x^2 \geq 0$ เสมอ

เราจึงสามารถนำ x^2 ไปคูณอสมการได้

$$\frac{1}{x}(x^2) < 0\,(x^2)$$

$$x < 0 \qquad \because \frac{x^2}{x} = x \text{ และ } x^2 \text{ คูณ } 0 \text{ ได้ } 0$$

เมื่อนำ $x < 0$ ไปทดสอบคำตอบพบว่า $\frac{1}{x} < 0$ จริง

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $(-\infty, 0)$

กิจกรรมที่ 3

เมื่อนักศึกษา ได้ศึกษาเนื้อหาในเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 3

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงเขียนช่วงต่อไปนี้ในรูปเซต พร้อมทั้งเขียนแต่ละช่วงด้วยกราฟบนเส้นจำนวน

(1) $(2, 5)$ = ...

(2) $[-3, 4]$ = ...

(3) $(-3, 7]$ = ...

(4) $[-2, 3)$ = ...

(5) $(-\infty, -3]$ = ...

(6) $(4, \infty)$ = ...

2. จงเขียนช่วงแทนสับเซตของจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $\{x|x > 4\}$ = ...

(2) $\{x|2 \le x \le 8\}$ = ...

(3) $\{x|-7 < x \le 5\}$ = ...

(4) $\{x|x \le -3\}$ = ...

(5) $\{x|5 < x < 9\}$ = ...

3. จงเติม $\in$ และ $\notin$ ลงในช่องว่าง

(1) 6..........$(2, 6)$

(2) -3..........$[-3, 5)$

(3) -2..........$[-3, \infty)$

(4) $\sqrt{10}$..........$(3, 9)$

(5) $-\frac{2}{5}$..........$(-1, 4]$

4. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง $A = (2, 5)$, $B = (-1, 9]$, $C = (-3, \infty)$ จงหาเซตต่อไปนี้ในรูปช่วง

(1) A' = ...

(2) B' = ...

(3) C' = ...

(4) $A \cap B$ = ...

(5) $B \cap C$ = ...

(6) $A-B$ = ...

(7) $B-A$ = ...

(8) $C-A$ = ...

(9) $(A-B)' \cup C$ = ...

(10) $A' \cap (C-B)$ = ...

3. การแก้อสมการตัวแปรเดียวกำลังมากกว่าหนึ่ง

หลักในการหาเซตของคำตอบ ให้จัดอสมการทั้งหมดให้มาอยู่ข้างเดียวกัน (โดยปกติจะให้ข้างขวาเป็น 0) แล้วแยกตัวประกอบของพหุนามทั้งหมดตามขั้นตอนของการแก้สมการตัวแปรเดียว และนำค่าที่ทำให้แต่ละตัวประกอบเป็น 0 มาเขียนแผนภาพของช่วงบนเส้นจำนวน ดังรูป

เมื่อ $a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_{n-1} < a_n$ และ $x = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\ a_n$

เซตคำตอบของอสมการจะมีลักษณะดังนี้

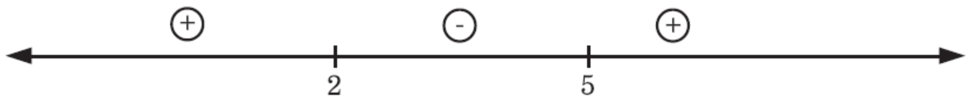
1. ถ้าอสมการเป็น $>, \geq, 0$ เซตคำตอบได้มาจากการยูเนียนของช่วงที่มีค่าบวก
2. ถ้าอสมการเป็น $<, \leq, 0$ เซตคำตอบได้มาจากการยูเนียนของช่วงที่มีค่าลบ

ตัวอย่าง จงแก้อสมการ $x^2-7x \geq -10$

วิธีทำ $x^2-7x \geq -10$

จัดให้มาอยู่ข้างเดียวกัน $x^2-7x+10 \geq 0$

แยกตัวประกอบ $(x-2)(x-5) \geq 0$



การพิจารณาเพื่อหาคำตอบจาก 3 บริเวณ

1) $x \geq 5$ เมื่อแทนในอสมการพบว่า $(x-2)(x-5) \geq 0$ เป็นบวก

2) $2 \leq x \leq 5$ เมื่อแทนในอสมการพบว่า $(x-2)(x-5) \leq 0$ เป็นลบ

3) $x \leq 2$ เมื่อแทนในอสมการพบว่า $(x-2)(x-5) \geq 0$ เป็นบวก

สรุปได้ว่า คำตอบของอสมการ $(x-2)(x-5) \geq 0$ คือของ x ที่ทำให้อสมการมีค่ามากกว่า 0 (เป็นบวก) ดังนั้นคำตอบ คือ

$x \leq 2$ หรือ $x \geq 5$

แทนด้วย $(-\propto, 2) \cup (5, \propto)$

กิจกรรมที่ 4

เมื่อนักศึกษา ได้ศึกษาเนื้อหาในเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 4

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงหาเซตคำตอบของอสมการในข้อต่อไปนี้

(1) $-2 < x+3 < 6$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(2) $-5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(3) $x-9 \leq 6-4x < 3x-4$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(4) $x-\frac{4x+3}{2} \leq 5x-1 \leq 3x-\frac{1}{2}$

วิธีทำ..

....

....

....

....

2. จงหาเซตคำตอบของอสมการในข้อต่อไปนี้

(1) $(x-3)(x-4) > 0$

วิธีทำ...

....

....

....

....

(2) $(x-4)(x+5) < 0$

วิธีทำ...

....

....

....

....

(3) $(x+4)(x-8) \geq 0$

วิธีทำ...

....

....

....

....

(4) $(x-2)(x+4) \leq 0$

วิธีทำ...

....

....

....

....

(5) $(3x-5)(2x-3) > 0$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(6) $(2x+1)(4x-5) \leq 0$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(7) $(x+1)(x+2)(x-3) > 0$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(8) $(x-4)(x+5)(x+4) \leq 0$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(9) $(2x+1)(3x-2)(x+1)(x+3) \geq 0$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(10) $(3x+1)(2x-3)(x+3)(x-4) < 0$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(11) $(3-x)(x+2)(x-4) < 0$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(12) $(2-x)(3-x)(2x+1) \geq 0$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(13) $x^2 < 4$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(14) $x^2 \geq 2x$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(15) $3x^2+4 \leq 13x$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(16) $6x^2-19x > -10$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(17) $3x^2-1 \geq 1+x-3x^2$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(18) $x^3-x^2 \geq 2x$

วิธีทำ..

....

....

....

....

(19) $(x^2-16)(x^3-x) > 0$

วิธีทำ

(20) $(2x^2-x-3)(x-3)(x^2-3x-10) < 0$

วิธีทำ

(21) $x^3-x^2-4x+4 \geq 0$

วิธีทำ

(22) $x^3-5x^2-x+5 \leq 0$

วิธีทำ

ตอนที่ 4 ค่าสัมบูรณ์และการแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

กำหนดให้สัญลักษณ์ $|a|$ คือค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a หมายถึง ระยะห่างระหว่างจุดแทน 0 กับจุดแทน a บนเส้นจำนวน ความหมายที่ให้นี้เป็นความหมายเชิงเรขาคณิต ซึ่งจะให้ความหมาย $|a|$ ในระบบจำนวนจริงดังนี้

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ถ้า } a > 0 \\ 0 & \text{ถ้า } a = 0 \\ -a & \text{ถ้า } a < 0 \end{cases}$$

ซึ่งจากบทนิยามนี้ทำให้ค่าสัมบูรณ์ของ a มีค่ามากกว่าศูนย์ หรืออย่างน้อยเท่ากับศูนย์ ไม่ว่า a จะเป็นจำนวนบวก ลบ หรือศูนย์

สมบัติของค่าสัมบูรณ์

กำหนดให้ x และ y $\in$ R และ a $\in$ R^+

1. $|x| \geq 0$ เสมอ
2. $|x| = |-x| = x$
3. $|x| = |y|$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ หรือ $x = -y$
4. $|xy| = |x| \cdot |y|$
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
6. $|x-y| = |y-x|$
7. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
8. $\sqrt{x^2} = |x|$
9. $|x+y| \leq |x|+|y|$

10. $|x-y| \geq |x|-|y|$

11. $x^2 = y^2$ ก็ต่อเมื่อ $|x| = |y|$

12. $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

13. $-x \leq |x| \leq x$

14. $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$

15. $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$

16. $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$

17. $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

18. $x^2 < y^2$ ก็ต่อเมื่อ $|x| < |y|$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเซตคำตอบของอสมการค่าสัมบูรณ์ต่อไปนี้

1. $|3x-1| < 2$
2. $|3+5x| \leq 2$
3. $|4x+1| > 7$
4. $|2x+3| \geq 5$
5. $|2x-2| \leq |x+1|$

แนวคิด 1. $|3x-1| < 2$ ก็ต่อเมื่อ $-2 < 3x-1 < 2$

จะได้ $-1 < 3x < 3$

$-\frac{1}{3} < x < 1$

$\therefore$ เซตคำตอบ คือ $\left\{x \middle| -\frac{1}{3} < x < 1\right\} = \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

2. $|3+5x| \leq 2$ ก็ต่อเมื่อ $-2 \leq 3x+5x \leq 2$

จะได้ $-5 \leq 5x \leq -1$

$-1 \leq x \leq -\frac{1}{5}$

$\therefore$ เซตคำตอบ คือ $\left\{x \middle| -1 \leq x \leq -\frac{1}{5}\right\} = \left[-1, -\frac{1}{5}\right]$

3. $|4x+1| > 7$ ก็ต่อเมื่อ $4x+1 < -7$ หรือ $4x+1 > 7$

จะได้ $4x < -8$ หรือ $4x > 6$

$x < -2$ หรือ $x > \frac{3}{2}$

$\therefore$ เซตคำตอบ คือ $\left\{x \middle| x < -2 \text{ หรือ } x > \frac{3}{2}\right\} = (-\propto, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, \propto\right)$

4. $|2x+3| \geq 5$ ก็ต่อเมื่อ $2x+3 \leq -5$ หรือ $2x+3 \geq 5$

จะได้ $2x \leq -8$ หรือ $2x \geq 2$

$x \leq -4$ หรือ $x \geq 1$

$\therefore$ เซตคำตอบ คือ $\left\{x \middle| x \leq -4 \text{ หรือ } x \geq 1\right\} = (-\propto, -4] \cup [1, \propto)$

5. $|2x-2| \leq |x+1|$ ก็ต่อเมื่อ $|2x-2|^2 \leq |x+1|^2$

จะได้ $(2x-2)^2 \leq (x+1)^2$

$4x^2-8x+4 \leq x^2+2x+1$

$3x^2-10x+3 \leq 0$

$(3x-1)(x-3) \leq 0$

ถ้า $(3x-1)(x-3) \leq 0$

$x \leq \frac{1}{3}$ หรือ 3

$\therefore$ เซตคำตอบ คือ $\left\{x \middle| \frac{1}{3} \leq x \leq 3\right\} = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$

กิจกรรมที่ 5

เมื่อนักศึกษา ได้ศึกษาเนื้อหาในเรื่องนี้จบแล้ว ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 5

แบบฝึกหัดที่ 5

1. จงพิจารณาข้อความในแต่ละข้อ ข้อใดเป็นจริงให้เขียนเครื่องหมาย ✓ และข้อใดไม่เป็นจริงให้เขียนเครื่องหมาย ✗

...........(1) $|3+8| = |3|+|8|$

...........(2) $|6-5| = |6|-|5|$

...........(3) $|3-9| = |9-3|$

...........(4) $|-4|^2 = |4|^2$

...........(5) $\left|\frac{5}{3}\right| = \frac{|5|}{|3|}$

...........(6) $|7\times 3| = |7|\times|3|$

...........(7) ถ้า $|x| + |y| = |x+y|$ แสดงว่า $xy \geq 0$

...........(8) $|x| \geq x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

...........(9) $|a| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

.........(10) กำหนด $a > 0$ และ $a < b$ ถ้า $a < |x| < b$ แล้ว $x \geq 0$ เสมอ

.........(11) ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $|x| = x$

.........(12) ถ้า $x < 0$ แล้ว $|x| = x$

.........(13) ถ้า $a < b$ แล้ว $|a| < |b|$

.........(14) ถ้า $|a| < |b|$ แล้ว $a^2 < b^2$

.........(15) ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $|a| < |b|$

2. จงหาคำตอบของสมการในแต่ละข้อ

> ***รูปแบบ*** $|f(x)| = 0$ สรุป $f(x) = 0$
> หรือ $|f(x)| = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก สรุป $f(x) = \pm a$

(1) $|x+8| = 0$

....

....

....

....

....

(2) $|x-4|+|4-x| = 0$

....

....

....

....

....

(3) $|5-2x| = 9$

....

....

....

....

....

(4) $|x^2-2x+2| = 1$

....

....

....

....

....

รูปแบบ $|f(x)| = a$ เมื่อ $a < 0$
สรุปได้ว่า เซตคำตอบ คือ $\varnothing$

(5) $|4x+3| = -3$

....

....

....

....

....

(6) $|6x-4|+2 = 0$

....

....

....

....

....

รูปแบบ $|f(x)| = g(x)$

สรุปได้ว่า $f(x) = g(x)$ หรือ $f(x) = -g(x)$

คำตอบที่ได้ให้นำมาตรวจคำตอบด้วยทุกครั้ง

(7) $|3x-2| = x+4$

....

....

....

....

....

(8) $|x+3| = 2x$

....

....

....

....

....

(9) $|x+2| = -x+3$

....

....

....

....

....

(10) $|2x+3| = 3x-5$

รูปแบบ $|f(x)| = f(x)$

สรุปได้ว่า $f(x) \geq 0$

(11) $|x+4| = x+4$

(12) $|2x-1| = 2x-1$

(13) $|5-x| = 5-x$

(14) $|x^2-3x-10| = x^2-3x-10$

....

....

....

....

....

(15) $|4x^2+10x-6| = 4x^2+10x-6$

....

....

....

....

....

(16) $|x^3-8| = x^3-8$

....

....

....

....

....

(17) $|x^3-2x^2-5x-6| = x^3-2x^2-5x+6$

....

....

....

....

....

(18) $|x^2+x+1| = x^2+x+1$

....

....

....

....

....

รูปแบบ $|f(x)| = -f(x)$
สรุปได้ว่า $f(x) \le 0$

(19) $|x-3| = 3-x$

....

....

....

....

....

(20) $|2x-5| = 5-2x$

....

....

....

....

....

(21) $|x^2-3x-4| = 3x+4-x^2$

....

....

....

....

....

(22) $|2x^2+5x-3| = 3-2x^2-5x$

....

....

....

....

....

(23) $|x^2+3x-4|+3x = 4-x^2$

....

....

....

....

....

(24) $|x^2+x-1| = 1-x-x^2$

....

....

....

....

....

รูปแบบ $|f(x)|+|g(x)| = |f(x)+g(x)|$
สรุปได้ว่า $f(x) \cdot g(x) \geq 0$

(25) $|x+3|+|x+2| = |2x+5|$

....

....

....

....

....

(26) $|x+7|+|x-4| = |2x+3|$

(27) $|2x+7|+|x-4| = |3x+3|$

(28) $|3x-5|+|2x-3| = |5x-8|$

(29) $|x^2-3x|+|5x+1| = |x^2+2x+1|$

(30) $|x^3-8|+|x^2-4| = |x^3+x^2-12|$

....

....

....

....

....

แบบทดสอบหลังเรียน

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. จงพิจารณาความสัมพันธ์ของเซตในข้อใดต่อไปนี้

   ก. เมื่อ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

   $\left\{\sqrt{16}+\sqrt[3]{-125},\ 2.999...,\ \frac{54\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\right\} \in I^+$

   ข. เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริง

   $\left\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2, \frac{1}{\sqrt{5}-3}, \sqrt{0.09}, \frac{\sqrt[4]{-72}}{\sqrt[4]{-2}}\right\} \in R$

   ค. เมื่อ Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ

   $\left\{2.121221222...,\ \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt{5}}, \sqrt{-8}, \frac{\sqrt{5}+3}{3-\sqrt{5}}\right\} \in Q'$

   ข้อใดสรุปถูกต้อง

   1. ผิดเฉพาะข้อ ก และ ข
   2. ผิดเฉพาะข้อ ข และ ค
   3. ผิดเฉพาะข้อ ก และ ค
   4. ผิดทั้ง 3 ข้อ

2. คำกล่าวใดข้อใดถูกต้อง

   1. เมื่อ E เป็นเซตของจำนวนคู่ และ Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ $E' \cap Q' = \varnothing$
   2. เมื่อ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม และ Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ $I' \in Q'$
   3. มีจำนวนตรรกยะที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 8
   4. มีจำนวนตรรกยะที่เป็นบวกและมีค่าน้อยที่สุด

3. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ ข้อต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง

   1. ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a+c > b+d$
   2. ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a-c > b-d$
   3. ถ้า $a > b > 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
   4. ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $ac > bd$

4. ให้ x เป็นอินเวอร์สการบวกของ $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+1}$ และ y เป็นอินเวอร์สการคูณของ x แล้ว y^2 เท่ากับข้อใด

1. $52+30\sqrt{3}$
2. $52-30\sqrt{3}$
3. $63+36\sqrt{3}$
4. $63-36\sqrt{3}$

5. กำหนดให้ $x*y = x+y-2$, $x, y \in R$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. เอกลักษณ์สำหรับการกระทำ $*$ คือ 2

ข. อินเวอร์สสำหรับการกระทำ $*$ ของจำนวน 3a คือ $4-3a$

ค. $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

คำกล่าวในข้อใดถูกต้องที่สุด

1. ถูกเฉพาะข้อ ก และ ข
2. ถูกเฉพาะข้อ ก และ ค
3. ถูกเฉพาะข้อ ข และ ค
4. ถูกทั้งสามข้อ

6. กำหนดให้ $3x^3+2x^2-x-1$ หารด้วย $x+2$ เหลือเศษ a และเมื่อหาร bx^2+9x-2 ด้วย $2-3x$ ลงตัวแล้ว $a+b$ จะอยู่ในช่วงใด

1. (14, 16)
2. (−38, 9)
3. (−9, 19)
4. (17, 24)

7. ถ้า $A = 15x^4-49x^3+kx^2+25x+6$ หารด้วย $x-3$ ลงตัวแล้ว ตัวประกอบของ A ตรงกับข้อใด

1 $(5x-1)(x-1)(x-3)(3x-2)$
2. $(5x+1)(x-1)(x-3)(3x+2)$
3. $(5x+1)(x+1)(x-3)(3x-2)$
4. $(3x+1)(x-1)(x-3)(5x+2)$

8. เซตคำตอบของสมการ $x^3-2x^2-23x+60 = 0$ ที่เป็นจำนวนเต็มบวกคือข้อใด

1. {3, 4, 5}
2. {3, 4}
3. {3, 5}
4. {4, 5}

9. กำหนดให้ m, n, p เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3-5x^2-16x+80 = 0$ ซึ่ง $m < n < p$ ค่าของ $n+p-m$ เท่ากับเท่าใด

1. 4
2. 5
3. 9
4. 13

10. เซตคำตอบของอสมการ $x^4+x^3-4x^2 < 2x^2$ ตรงกับข้อใด

1. $\{x|-3 < x < 2\}$
2. $\{x|-3 < x < 0$ หรือ $0 < x < 2\}$
3. $\{x|x > 2$ หรือ $x < -3\}$
4. $\{x|x > 2$ หรือ $x < -3$ หรือ $x = 0\}$

11. ข้อใดมีคำตอบแตกต่างจากข้ออื่น

1. $x^2-4x+6 \geq 0$
2. $(x-2)^2\ (2x+3)^4\ (x+3)^6 \geq 0$
3. $\dfrac{(x^4+4)\ (3x-2)^2}{(x^2+1)^4} \geq 0$
4. $\dfrac{(x-5)^2\ (x+5)^4}{(x+6)^6} \geq 0$

12. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\dfrac{(x+7)^3\ (x-4)^5}{(x-1)^2} < 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $3x^2+5x-11 < 2x^2-x-4$ แล้ว A–B เท่ากับข้อใด

1. $\varnothing$
2. $(1, 4)$
3. $[1, 4)$
4. $[1, 4]$

13. ถ้า A คือ เซตคำตอบของอสมการ $\dfrac{4}{x+3} \geq \dfrac{2}{x-1}$

แล้ว B คือ เซตคำตอบของอสมการ $\dfrac{3x-2x^2}{4x^2+1} \geq 0$

แล้ว $A-B'$ ตรงกับข้อใด

1. $[0, 1)$
2. $(-3, 1)$
3. $[0, 5)$
4. $(1, 5]$

14. กำหนด x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $-|x| \leq x \leq |x|$
2. $\sqrt{(x-3)^2} = x-3$
3. $|x-y| \geq |x|-|y|$
4. ถ้า $|x| < a$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $-a < x < a$

15. กำหนดให้ $x \in R$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\{x|2x < 3\} = \left\{x\middle|\dfrac{3}{x} > 2\right\}$
2. $\{x|x^2 < 9\} = \left\{x\middle|\dfrac{1}{|x|+2} > \dfrac{1}{5}\right\}$
3. $\{x|(2-x)^3 < 0\} = \left\{x\middle|\dfrac{1}{|x-2|} > 0\right\}$
4. $\{x||x-2| < 3\} = \left\{x\middle|\dfrac{1}{|x-2|} > \dfrac{1}{3}\right\}$

16. กำหนด $\left|\frac{x^2-1}{2-x}\right| = \frac{x^2-1}{x-2}$ เซตคำตอบคือข้อใด

1. $\{x \in R | x \le -1$ หรือ $1 \le x < 2\}$
2. $\{x \in R | x \le -1$ หรือ $1 \le x \le 2\}$
3. $\{x \in R | -1 \le x$ หรือ $1 \ge x \ge 2\}$
4. $\{x \in R | -1 \le x \le 1$ หรือ $x > 2\}$

17. กำหนดให้ $A = \left\{x \in R \middle| \frac{|x+1|-1}{|x+1|-2} \le 0\right\}$, $B = \{x \in R | 1 \le |x+1| \le 3\}$

$A \cup B'$ ตรงกับข้อใด

1. $(-\infty, -4) \cup (-2, 0) \cup (2, \infty)$
2. $[-4, -2] \cup [0, 2]$
3. $(-\infty, -4) \cup (-3, 1) \cup (2, \infty)$
4. $(-\infty, -4] \cup [-3, 1] \cup [2, \infty)$

18. เซตคำตอบของอสมการ $|5x-6| > 2x+5$ เท่ากับข้อใด

1. $\left(-\infty, \frac{1}{7}\right)$
2. $\left(\frac{11}{3}, \infty\right)$
3. $\left(-\infty, \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{11}{3}, \infty\right)$
4. $x \in \left(-\infty, \frac{1}{7}\right) \cup \left[\frac{11}{3}, \infty\right)$

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

1. 4
2. 3
3. 3
4. 2
5. 2
6. 4
7. 3
8. 4
9. 1
10. 1
11. 4
12. 4
13. 3
14. 3
15. 2
16. 2
17. 2
18. 2

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1.	✓ (1)	✗ (2)	✗ (3)	✓ (4)	✗ (5)
	✗ (6)	✗ (7)	✓ (8)	✓ (9)	✓ (10)
	✗ (11)	✗ (12)	✗ (13)	✗ (14)	✗ (15)
	✓ (16)	✗ (17)	✗ (18)	✓ (19)	✓ (20)

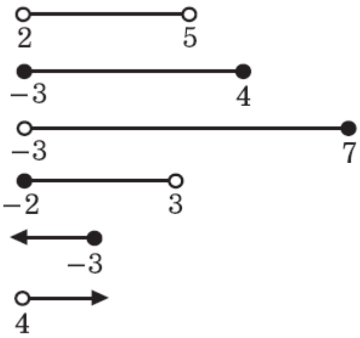
2.	✗ (1)	✗ (2)	✓ (3)	✗ (4)	✗ (5)
	✓ (6)	✗ (7)	✗ (8)	✗ (9)	✓ (10)
	✓ (11)	✓ (12)	✓ (13)	✗ (14)	✓ (15)
	✓ (16)	✗ (17)	✗ (18)	✗ (19)	✓ (20)
	✓ (21)	✗ (22)	✗ (23)	✓ (24)	✓ (25)
	✓ (26)	✓ (27)	✓ (28)	✗ (29)	✗ (30)
	✓ (31)	✓ (32)	✗ (33)	✗ (34)	✗ (35)
	✗ (36)	✗ (37)	✗ (38)	✗ (39)	✗ (40)

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2

✗ (1)	✓ (2)	✓ (3)	✓ (4)	✓ (5)
✓ (6)	✗ (7)	✗ (8)	✗ (9)	✓ (10)
✓ (11)	✓ (12)	✗ (13)	✓ (14)	✓ (15)
✓ (16)	✗ (17)	✗ (18)	✗ (19)	✓ (20)

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3

1. (1) $\{x \mid 2 < x < 5\}$
   (2) $\{x \mid -3 \le x \le 4\}$
   (3) $\{x \mid -3 < x \le 7\}$
   (4) $\{x \mid -2 \le x < 3\}$
   (5) $\{x \mid x \le -3\}$
   (6) $\{x \mid x > 4\}$



2. (1) $(4, \propto)$ (2) $[2, 8]$ (3) $(-7, 5]$ (4) $(-\propto, -3]$ (5) $[5, 9]$

3. (1) $\notin$ (2) $\in$ (3) $\in$ (4) $\in$ (5) $\in$

4. (1) $(-\propto, 2], [5, \propto)$ (2) $(-\propto, -1], (9, \propto)$ (3) $(-\propto, -3]$
   (4) $(2, 5)$ (5) $(-1, 9]$ (6) $(-\propto, \propto)$
   (7) $(-\propto, \propto)$ (8) $(-\propto, \propto)$ (9) $(-3, \propto)$
   (10) $(-\propto, 2], [5, \propto)$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 4

1. (1) $\{x \mid 1 < x < 9\}$
   (2) $\{x \mid \frac{14}{3} > x > \frac{2}{3}\}$
   (3) $\{x \mid x \le 3\}$
   (4) $\{x \mid x \ge \frac{1}{4}\}$

2. (1) $\{x \mid x < 3$ หรือ $x > 4\}$
   (2) $\{x \mid -5 < x < 4\}$
   (3) $\{x \mid x < -4$ หรือ $x > 8\}$
   (4) $\{x \mid x \le 2\}$
   (5) $\{x \mid x > \frac{3}{2}\}$

(6) $\{x \mid x \le \frac{5}{4}\}$

(7) $\{x \mid x > -1\}$

(8) $\{x \mid x \le 4\}$

(9) $\{x \mid x \ge -3\}$

(10) $\{x \mid x < 4\}$

(11) $\{x \mid x < 4\}$

(12) $\{x \mid x \ge -\frac{1}{2}\}$

(13) $\{x \mid x < \pm 2\}$

(14) $\{x \mid x \ge 2\}$

(15) $\{x \mid x \le 4\}$

(16) $\{x \mid x > \frac{2}{3}\}$

(17) $\{x \mid x \ge -\frac{1}{2}\}$

(18) $\{x \mid x \ge -1\}$

(19) $\{x \mid x > -4\}$

(20) $\{x \mid x < 5\}$

(21) $\{x \mid x \ge -4\}$

(22) $\{x \mid x \le 5\}$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 5

1. ✓(1) ✓(2) ✓(3) ✓(4) ✓(5)
✓(6) ✓(7) ✗(8) ✗(9) ✗(10)
✓(11) ✓(12) ✗(13) ✓(14) ✓(15)

2. (1) $x = 8$ (2) $x = 4$ (3) $x = -2$
(4) $x = -1$ (5) $x = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$ (6) $x = \frac{2}{3}$
(7) $x = 3$ (8) $x = 3$ (9) $x = \frac{1}{2}$
(10) $x = 8$ (11) $x = -4$ (12) $x = \frac{1}{2}$

(13) $x = -5$ (14) $x = -2, 5$ (15) $x = \frac{-1}{2}, 3$

(16) $x = 2$ (17) $x = \frac{1}{3}, 1$ (18) $x = 1$

(19) $x = 3$ (20) $x = \frac{5}{2}$ (21) $x = -1, 4$

(22) $x = \frac{1}{2}, -3$ (23) $x = -1, 4$ (24) $x = -\frac{1}{2}$

(25) $x = -\frac{5}{2}$ (26) $x = -\frac{3}{2}$ (27) $x = -1$

(28) $x = \frac{8}{5}$ (29) $x = -1$ (30) $x = -2$

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

1. 3
2. 1
3. 1
4. 1
5. 3
6. 4
7. 4
8. 2
9. 4
10. 1
11. 2
12. 2
13. 4
14. 2
15. 4
16. 1
17. 3
18. 2

บรรณานุกรม

ศูนย์การศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ. **หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 สำหรับคนไทยในต่างประเทศ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย**. กรุงเทพฯ : รังษีการพิมพ์, 2553.

ศูนย์ส่งเสริมการศึกษานอกโรงเรียนกลุ่มเป้าหมายพิเศษ. **หลักสูตรสถานศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 หมวดวิชาคณิตศาสตร์.** เอกสารอัดสำเนา. ม.ป.ป.

สำนักบริหารงานการศึกษานอกโรงเรียน. **ชุดการเรียนทางไกล ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย หมวดวิชาคณิตศาสตร์ รหัส คณ 30 (MA 30)**. กรุงเทพฯ : เอกพิมพ์ไท จำกัด, 2547.

___________. **สมุดบันทึกกิจกรรมการเรียนรู้ ประกอบชุดการเรียนทางไกล ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย หมวดวิชาคณิตศาสตร์ รหัส คณ 30 (MA 30)**. กรุงเทพฯ : เอกพิมพ์ไท จำกัด, 2547

สำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัย. **หลักสูตรการศึกษานอกระบบระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 สาระความรู้พื้นฐาน**. กรุงเทพฯ : รังษีการพิมพ์, 2553.

คณะผู้จัดทำ

ที่ปรึกษา

นายอภิชาติ จีระวุฒิ	เลขาธิการ กศน.
นายชัยยศ อิ่มสุวรรณ์	รองเลขาธิการ กศน.
นายวัชรินทร์ จำปี	รองเลขาธิการ กศน.
นางมาริสา โกเศยะโยธิน	ผู้อำนวยการศูนย์การศึกษานอกระบบ และการศึกษาตามอัธยาศัยกลุ่มเป้าหมายพิเศษ

ผู้เรียบเรียง

นางวรรษวรรณ บรรลือฤทธิ์

คณะบรรณาธิการ

นางมาริสา โกเศยะโยธิน
นางวันทนา จันทร์เพ็ญ
นางกรแก้ว พรหมจิระประวัติ
นางวรรษวรรณ บรรลือฤทธิ์
นายสุทธิศักดิ์ แสนชื่น